Université de Toulon
L1 Sciences Économiques et Gestion - Année universitaire 2017/2018
Contrôle Continu 1 "type"
Durée: 1h00

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont **formellement interdits**. On tiendra le plus grand compte de la présentation. Bien séparer les questions entre elles.

Exercice I. Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

I.1 Dans ce qui suit, quelles sont les opérations sur les matrices que l'on peut faire, et celles que l'on ne peut pas faire? (répondre sans justifier pour cette question)

$$A{+}M,\quad A{+}B,\quad AM,\quad MN,\quad NM,\quad AB,\quad BA.$$

Réponse: On peut calculer $A+B$, AM, NM, AB et BA. On ne peut pas calculer $A+M$ et MN.

I.2 Calculer $2A$. Calculer AB.

Réponse: $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, et $AB = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. On remarque que comme A est inversible, $AB = I_3$ implique que B est la matrice inverse de A.

Exercice II.

II.1 Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. Est-ce que la matrice M est inversible?

Réponse: $\det(M) = 2 \times 3 - (-6) \times (-1) = 6 - 6 = 0$. Comme le déterminant de la matrice carrée M est nul, on en déduit que M n'est pas inversible.

II.2 Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1. \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle inversible? Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Donner l'expression de AX en fonction de x, y et z.

Réponse. Par la règle de Sarrus ou en développant par rapport à une ligne ou une colonne, on trouve $\det(A) = -4$. Comme $\det(A) \neq 0$, on en déduit que A est une matrice inversible. On a $AX = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ 2y+3z \\ -x+y-z. \end{pmatrix}$

II.3 Résoudre le système suivant (par la méthode de votre choix: vous pouvez utiliser les questions précédentes ou la méthode du pivot de Gauss ou autre)

$$\begin{cases} x+y+2z = 1 \\ 2y+3z = 3 \\ -x+y-z = 0 \end{cases}$$

Réponse: On peut remarquer que le système s'écrit $AX = C$ où $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme $AX = C$, on obtient $B(AX) = BC$, et comme B est l'inverse de la matrice A, on a $AB = BA = I_3$, et donc $B(AX) = (BA)X = I_3X = X$. L'égalité $B(AX) = BC$ donne alors $X = BC$. La solution est donc donnée par

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = BC = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc, l'ensemble des solutions est $S = \{(-1, 0, 1)\}$ (une seule solution).

La résolution par la méthode du pivot de Gauss donne le même résultat.

II.4 Calculer l'inverse de la matrice suivante (par exemple en utilisant la méthode de Gauss-Jordan vue en cours): $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1. \end{pmatrix}$

Réponse: La méthode de Gauss-Jordan vue en cours et en TD donne

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 3/4 & 1/2. \end{pmatrix}$$

Exercice III.

III.1 Enoncer la proposition 3.18 du cours qui permet de caractériser une base de $\mathbb{R}^n$.

Réponse: $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si c'est un ensemble de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\det(f_1, f_2, \cdots, f_n) \neq 0$.

III.2 Application. Parmi les ensembles suivants, dire ceux qui sont une base de $\mathbb{R}^3$ en justifiant votre réponse (l'absence de justification ne rapportera pas de point à la question).

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Réponse: $\mathcal{B}_1$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car ses éléments sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
$\mathcal{B}_2$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car elle ne contient que 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
$\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car elle contient 3 vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ et que le déterminant (c'est le déterminant de A calculé dans II.2)

$$\det(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

est non nul. On applique alors à $\mathcal{B}_3$ la Proposition rappelée dans la question III.i).