Université de Toulon
L1 Sciences Économiques et Gestion - Année universitaire 2017/2018

Durée: 50 minutes

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont **formellement interdits**. On tiendra le plus grand compte de la présentation. Bien séparer les questions entre elles.

Exercice I.(6pts) Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss, en donnant les étapes de calcul et en précisant les opérations sur les lignes effectuées.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Réponse:

$$\begin{cases} x & +2y & +2z & = & 3 & \\ 2x & & +z & = & 4 & L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ x & -y & -z & = & 0 & L_3 \to L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +2z & = & 3 & \\ & -4y & -3z & = & -2 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ & -3y & -3z & = & -3 & \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +2z & = & 3 & \\ & -3y & -3z & = & -3 & L_2 \to \frac{L_2}{-3} \\ & -4y & -3z & = & -2 & \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +2z & = & 3 & \\ & y & +z & = & 1 & \\ & -4y & -3z & = & -2 & L_3 \to L_3 + 4L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & & & = & 1 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{(1, -1, 2)\}$.

Exercice II.(5pts) Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

II.1 Dans ce qui suit, quelles sont les opérations sur les matrices que l'on peut faire, et celles que l'on ne peut pas faire? (répondre sans justifier pour cette question)

$$A+M, \quad A+2B, \quad AM, \quad MN, \quad NM, \quad A^2.$$

Réponse: On peut calculer $A + 2B$, AM, NM et A^2. On ne peut pas calculer $A + M$ et MN.

II.2 Calculer $2A$. Calculer AB. Calculer A^t (transposée de A).

Réponse: On a:

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \; AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Exercice III.(5pts) Calculer le déterminant des matrices suivantes, et dire, en justifiant, celles qui sont inversibles et celles qui ne le sont pas.

$$E = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -3. \end{pmatrix}$$

Réponse:

$$\det(E) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - (-3) \times (-1) = 12 - 3 = 9.$$

Comme le déterminant de E est non nul, E est inversible.

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-1) \times (-3) + 3 \times (-1) = 0.$$

Le déterminant de C est nul, donc C n'est pas inversible.

Exercice IV.(4pts)
IV.1 Donner la définition de $\mathbb{R}^3$.
Réponse: $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets définis par $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$.
IV.2 Parmi les ensembles suivants, dire ceux qui sont une base de $\mathbb{R}^3$ en justifiant votre réponse (l'absence de justification ne rapportera pas de point à la question).

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Réponse: En utilisant le Théorème 3.18 du cours, on a:
$\mathcal{B}_1$ n'est pas une base car ne contient que deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et toute base de $\mathbb{R}^3$ doit contenir trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
$\mathcal{B}_2$ est une base, car elle contient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ **et** le déterminant des vecteurs colonnes est égal à $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \cdots = -4 \neq 0.$
$\mathcal{B}_3$ n'est pas une base car c'est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et pas de $\mathbb{R}^3$.