Université de Toulon
L1 Sciences Économiques et Gestion - Année universitaire 2018/2019
Contrôle Continu 1 *"type"* - Mathématiques appliquées 3
Durée: 1h15 (tiers temps: +25 min)

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont **formellement interdits**. On tiendra le plus grand compte de la présentation. Bien séparer les questions entre elles.

Exercice 1.(3pts) Calculer les dérivées des fonctions suivantes:
$f_1(x) = x^7 - 1$; $f_2(x) = e^{3x}\ln(2x+1)$; $f_3(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$
Réponse: La fonction f_1 est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_1'(x) = 7x^6$. La fonction f_2 est le produit de deux fonctions: la fonction e^{3x}, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $3e^{3x}$; et la fonction $\ln(2x+1)$ dérivable pour tout x tels que $2x+1 > 0$, i.e. pour $x \in]-1/2, +\infty[$, de dérivée $2/(2x+1)$. On a donc, par dérivation du produit de deux fonctions, que f_2 est dérivable sur $]-1/2,+\infty[$, avec $f_2'(x) = 3e^{3x}\ln(2x+1) + e^{3x}\frac{2}{2x+1}$. La fonction $f_3(x)$ est le quotient de deux fonctions. La fonction polynôme x^2+1 est dérivable sur $\mathbb{R}$; la fonction $\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$; on a donc f_3 dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f_3'(x) = \frac{\sqrt{x}2x - (x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2x\sqrt{x} - \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x^2 - \frac{x^2+1}{2}}{x\sqrt{x}} = \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}$.

Exercice 2.(3pts) Calculer les primitives suivantes:
$\int e^{4x+2}dx$, $\int \sqrt{3x+2}dx$.
Réponse: $\int e^{4x+2}dx = \frac{1}{4}e^{4x+2} + \text{constante}$

$\int \sqrt{3x+2}dx = \frac{2}{3}\frac{1}{3}(3x+2)^{3/2} + \text{constante} = \frac{2}{9}(3x+2)^{3/2} + \text{constante}$

Exercice 3.(4pts) À l'aide d'une intégration par parties, calculer toutes les primitives de xe^{-x}. En déduire $\int_0^1 xe^{-x}dx$.
Réponse: On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$. On a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$. Par intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{e^{-x}}_{v'(x)}dx &= \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{(-e^{-x})}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)}\underbrace{(-e^{-x})}_{v(x)}dx \\
&= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx \\
&= -xe^{-x} - e^{-x} + \text{constante.}
\end{aligned}$$

Exercice 4.(4pts) A l'aide d'un changement de variable calculer:
$\int_0^1 (1+e^x)(1-e^{2x})e^{3x}dx$.
Réponse: On pose $u = e^x$, $du = e^x dx$. Pour $x = 0$, $u = e^0 = 1$ et pour $x = 1$, $u = e^1 = e$. On a donc en écrivant $e^{3x} = e^{2x}e^x$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+e^x)(1-e^{2x})e^{3x}dx = \int_0^1 (1+e^x)(1-e^{2x})e^{2x}\underbrace{e^x dx}_{du} &= \int_1^e (1+u)(1-u^2)u^2 du \\
&= \int_1^e u^2 - u^4 + u^3 - u^5 du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6}\right]_1^e \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{e^5}{5} + \frac{e^4}{4} - \frac{e^6}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.(4pts) A l'aide d'une décomposition en fractions rationnelles, calculer: $\int \frac{x^4-3}{x^2-1}dx$.

Réponse: Dans la fraction rationnelle $\frac{x^4-3}{x^2-1}$, le numérateur est de degré supérieur ou égal au degré du dénominateur. On commence donc par effectuer la division euclidienne de x^4-3 par x^2-1. On obtient: $x^4-3=(x^2-1)(x^2+1)-2$. On a donc

$$\int \frac{x^4-3}{x^2-1}dx = \int x^2+1-\frac{2}{x^2-1}dx$$

La fraction rationnelle $\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$ est de première espèce et on a: $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$. Donc $\int \frac{2}{x^2-1}dx=\int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}dx=\ln|x-1|-\ln|x+1|$. On conclut donc

$$\int \frac{x^4-3}{x^2-1}dx = \int x^2+1-\frac{2}{x^2-1}dx = \frac{x^3}{3}+x-\ln|x-1|+\ln|x+1|+\text{constante}.$$

Exercice 6.(3pts) Sans les calculer, dire si les intégrales suivantes sont convergentes ou pas: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$, $\int_0^{+\infty}x^2e^{-3x}$, $\int_0^1\frac{e^x}{x^3}dx$.

Réponse: La fonction $\frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc elle est intégrable sur tout intervalle fermé borné. En particulier, quel que soit $M>0$, l'intégrale $\int_0^M\frac{1}{1+x^2}dx$ est bien définie. On a aussi, pour tout $x>1$, $0\le\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{x^2}$. L'intégrale de référence de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ est bien définie. Comme $\frac{1}{1+x^2}$ est positive et majorée par $\frac{1}{x^2}$, on en déduit que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ est bien définie.

La fonction x^2e^{-3x} est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur tout intervalle fermé borné. On sait de plus que pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty}x^Ne^{-3x}=0$. Fixons $N=4$. On a donc $\lim_{x\to\infty}x^4e^{-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{-3x}}{1/x^2}=0$. Donc la fonction x^2e^{-3x} est négligeable en $+\infty$ par rapport à $1/x^2$. Comme l'intégrale de Riemann de référence $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ est bien définie, et que la fonction x^2e^{-3x} est positive, on conclut, par critère de comparaison, que $\int_1^{+\infty}x^2e^{-3x}dx$ est bien définie. La continuité de x^2e^{-3x} sur $\mathbb{R}$ assure que l'intégrale de x^2e^{-3x} est bien définie aussi sur $[0,1]$. Donc $\int_0^{+\infty}x^2e^{-3x}dx$ est bien définie.

La fonction $\frac{e^x}{x^3}$ est continue sur $]0,1]$, donc intégrable sur tout intervalle fermé borné de $]0,1]$. La fonction n'est pas définie en 0. Pour tout $x>0$, on a $0\le\frac{1}{x^3}\le\frac{e^x}{x^3}$. La fonction $1/x^3$ n'est pas intégrable en 0: $\int_0^1\frac{1}{x^3}dx$ n'est pas convergente. Par critère de comparaison, on en déduit que $\int_0^1\frac{e^x}{x^3}dx$ n'est pas convergente.