Université de Toulon
L1 Sciences Économiques et Gestion - Année universitaire 2017/2018
Contrôle Continu 2
Durée: 1:00

Corrigé
Les documents, calculatrices et téléphones portables sont **interdits**. On tiendra le plus grand compte de la présentation.

Exercice I. (6 pts)
I.1) Donnez les dérivées des fonctions suivantes (on ne précisera pas les domaines de définition et de dérivation, et on ne détaillera pas les calculs).

$f_1(x) = 3x^4+1$; $f_2(x) = \sin(x)$; $f_3(x) = e^{2x}$; $f_4(x) = \sqrt{x}$; $f_5(x) = \ln(x)$; $f_6(x) = \cos(x)e^x$

Réponse: $f_1'(x) = 12x^3$, $f_2'(x) = \cos(x)$, $f_3'(x) = 2e^{2x}$, $f_4'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f_5'(x) = \frac{1}{x}$, et $f_6'(x) = -\sin(x)e^x + \cos(x)e^x = e^x(\cos(x) - \sin(x))$.
I.1) En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées $(f \circ g)'$ que vous rappellerez, calculez: $(\cos(1-x^2))'$
Réponse: En tout point x_0 tel que g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$, on a

$$(f \circ g(x_0))' = (f(g(x_0)))' = g'(x_0) \times f'(g(x_0))$$

Ici, si on pose $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = 1 - x^2$, on a $f \circ g(x) = \cos(1-x^2)$. Comme ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que $(\cos(x))' = -\sin(x)$ et $(1-x^2)' = -2x$, on obtient

$$\big(\cos(1-x^2)\big)' = (-2x) \times \big(-\sin(1-x^2)\big) = 2x\sin(1-x^2)$$

Exercice II. (11 pts)
Soit $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\ell(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - 25x + 4y^2.$$

II.1) Donnez le domaine de définition de ℓ.
Réponse: La fonction de deux variables ℓ étant un polynôme dans les variables x et y, alors ℓ est définie sur tout $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{D}_\ell = \mathbb{R}^2$.
II.2) En faisant l'étude usuelle, montrez que l'ensemble des points critiques de ℓ est exactement $\mathcal{C} = \{(-4;-3), (-4;3), (-5;0), (5;0)\}$ (Soyez précis dans la résolution).
Réponse: (x,y) est un point critique de ℓ si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ 2xy + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ 2y(x+4) = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $x = -4$ ou $y = 0$.
$\triangleright$ Quand $x = -4$, en reportant dans la première équation, on obtient $(-4)^2 + y^2 - 25 = 0$, et donc $y^2 = 9$, ce qui donne $y = \pm 3$. On obtient deux points critiques: $(-4,3)$ et $(-4,-3)$
$\triangleright$ Quand $y = 0$, en reportant dans la première équation, on obtient $x^2 + 0^2 - 25 = 0$, et donc $x^2 = 25$, ce qui donne $x = \pm 5$. On obtient deux points critiques: $(-5,0)$ et $(-5,0)$.
II.3) Calculez la hessienne $H(\ell)$ de ℓ et déterminez la nature des points critiques.

Réponse: La hessienne de ℓ est la matrice des dérivées partielles secondes de ℓ (qui sont toutes bien définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, car ℓ est un polynôme, et ce qui justifie la discussion qui va suivre sur la nature des points critiques):

$$H(\ell) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x+8 \end{pmatrix}$$

▷ Calcul de la hessienne au point critique $(-5, 0)$:

$$H(\ell)|_{(-5,0)} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 20 > 0$ et $\Delta_1 = -10 < 0$. On en conclut que $(-5, 0)$ est un maximum local de ℓ.

▷ Calcul de la hessienne au point critique $(5, 0)$:

$$H(\ell)|_{(5,0)} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

On a $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = 180 > 0$ et $\Delta_1 = 10 > 0$. On en conclut que $(5, 0)$ est un minimum local de ℓ.

▷ Calcul de la hessienne au point critique $(-4, -3)$:

$$H(\ell)|_{(-4,-3)} = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$. On en conclut que $(-4, -3)$ est un point col de ℓ.

▷ Calcul de la hessienne au point critique $(-4, -3)$:

$$H(\ell)|_{(-4,3)} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$. On en conclut que $(-4, 3)$ est un point col de ℓ.

Exercice III. (3 pts)

On considère le problème de calcul d'extrema sous contrainte suivant:

$$\begin{cases} h(x,y) = e^{x-y^2} + x & \text{(fonction à étudier)} \\ x^2 + 2y^2 = 1 & \text{(contrainte)} \end{cases}$$

Écrivez le lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ associé à ce problème. On ne demande pas de résoudre le problème.

Réponse: Le lagrangien associé à ce problème est:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \left(e^{x-y^2} + x\right) - \lambda \left(x^2 + 2y^2 - 1\right)$$