UTLN - L3 Maths - Contrôle Continu

Exercice 1. Soit X un ensemble de cardinal infini. On suppose qu'on a une partition dénombrable $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de X. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$.

On considère l'ensemble

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{j\in J} A_j \;\middle|\; J \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\} \cup \left\{ \emptyset \right\}$$

(1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu.

<u>**Réponse :**</u> On montre les trois propriétés qui caractérisent une tribu :

a) On a par définition de $\mathcal{F}$: $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) Soit $A \in \mathcal{F}$. Alors, il existe $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $A = \cup_{j\in J} A_j$. On a donc $A^c = \cup_{j\in\mathbb{N}\setminus J} A_j$ et donc $A^c \in \mathcal{F}$ car $\mathbb{N}\setminus J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

c) Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite déléments de $\mathcal{F}$. Alors, il existe une suite $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \cup_{j\in J_k} A_j$. Donc

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\cup_{j\in J_k} A_j) = \bigcup_{j\in(\cup_k J_k)} A_j$$

avec $\cup_k J_k \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ car réunion d'ensembles de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. D'où $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathcal{F}$

Les trois propriétés a), b) et c) montrent que $\mathcal{F}$ est une tribu.

(2) Montrer que c'est la plus petite tribu contenant tous les A_j.

<u>**Réponse :**</u> Soit $\mathcal{F}'$ une tribu contenant tous les A_j. Soit $A_J := \cup_{j\in J} A_j$ un élément quelconque de $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}'$ contient tous les A_j elle contient en particulier $\cup_{j\in J} A_j = A_J$. Donc, tout élément de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}'$. Conclusion $\mathcal{F}$ est incluse dans n'importe quelle tribu qui contient tous les A_j. Comme de plus, par définition, $\mathcal{F}$ contient tous les A_j, elle est la plus petite tribu contenant tous les A_j.

Exercice 2. Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive, μ-mesurable et d'intégrale par rapport à μ finie.
On définit l'application $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ par

$$\nu(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{1}_A(x)d\mu(x)$$

où $\mathbf{1}_A(x)$ est la fonction indicatrice de A qui vaut 1 si x est dans A et qui vaut 0 sinon. Montrer que ν est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.
<u>**Réponse :**</u> On a les propriétés suivantes :
a) Pour tout ensemble $A \in \mathcal{A}$, puisque f est positive et que $\mathbf{1}_A$ est positive, alors $\nu(A)$ est positive. De plus, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a par positivité de f et par définition de $\mathbf{1}_A$, $0 \le f(x)\mathbf{1}_A(x) \le f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc

$$\nu(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{1}_A(x)d\mu(x) \le \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) < \infty$$

par hypothèse sur f. On a donc montré que f est une application à valeur dans $[0, +\infty]$ (et même dans $[0, +\infty[$).
b) On a

$$\nu(\emptyset) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{1}_\emptyset(x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\mu(x) = 0.$$

c) Enfin, Pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$, on a

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_k A_k\right) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{1}_{(\cup_k A_k)}(x)d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\sum_k \mathbf{1}_{A_k}(x)\right) d\mu(x) \quad \text{car les } A_k \text{ deux à deux disjoints} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_k f(x)\mathbf{1}_{A_k}(x)\right) d\mu(x) \quad \text{par distribution} \\
&= \sum_k \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{1}_{A_k}(x)d\mu(x)
\end{aligned}$$

par intervertion de $\sum$ et $\int$ toujours valable pour des fonctions positives mesurables

$$= \sum_k \nu(A_k).$$

Par a), b) et c), on a montré que ν était une mesure.

Exercice 3. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur l'intervalle $[0, 2]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x}$$

Déterminer, en utilisant un théorème de convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,2]} f_n(x)dx$$

Réponse : On vérifie que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèse du théorème de convergence dominée.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et donc Lebesgue-mesurable.

b) Soit la fonction g définie sur $[0, 2]$ par

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ (1 + e^x)^{-1} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1, 2] \end{cases}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} x^n$ vaut 0 si $x \in [0, 1[$, vaut 1 si $x = 1$ et vaut $+\infty$ si $x \in]1, 2]$, alors on a pour tout $x \in [0, 2]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$$

i.e., $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ sur $[0, 2]$, et e^{-x} est intégrable sur $[0, 2]$.

Par a), b) et c), on peut appliquer le théorème de convergence dominée, donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2]} f_n(x)dx = \int_{[0,2]} g(x)dx,$$

et le calcul donne

$$\int_{[0,2]} g(x)dx = \int_{[0,1[} e^{-x}dx = 1 - e^{-1},$$

où on a utilisé dans la première égalité que la valeur de g au seul point $x = 1$ ne change pas la valeur de l'intégrale et o‘̆dans la dernière égalité on a utilisé que l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue coïncident sur des intervalles compacts pour des fonctions positives continues. On a donc montré

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,2]} f_n(x)dx = 1 - e^{-1}.$$