

2. PRIMITIVES, INTÉGRALES (2ÈME PARTIE)

EXERCICE 2.1 (Intégrations par parties). Déterminer les primitives suivantes

$$\int x e^{3x} dx, \quad \int x^p \ln(x) dx \quad (\text{avec } p \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int \frac{2x}{\sqrt{2x-1}} dx.$$

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Calculer I_0 puis I_1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer I_{n+1} à partir de I_n à l'aide d'une intégration par parties. En déduire I_n en fonction de n .

EXERCICE 2.2. Par changement de variable, déterminer:

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx, \quad \int \frac{e^x}{1+e^x} dx, \quad \int \frac{\ln(x)}{x} dx, \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \quad (\text{poser ici } t = \sqrt{x}).$$

EXERCICE 2.3 (Décompositions en éléments simples).

Par décompositions en éléments simples de première espèce, calculer:

$$\int \frac{x^4 + x - 1}{x^2 - 1} dx \quad \text{et} \quad \int \frac{2x}{x^2(x^2 - 4)} dx.$$

Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}} dx \quad \text{et} \quad \int_3^4 \frac{x^5 + 1}{x^2 - 4} dx$$

EXERCICE 2.4. Déterminer les intégrales généralisées suivantes:

$$\int_0^1 \ln(x) dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx, \\ \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln(x)}} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2 - 1} dx.$$

EXERCICE 2.5 (Convergence des intégrales généralisées).

Étudier, sans nécessairement chercher à les calculer, la convergence des intégrales suivantes:

$$\int_{-\infty}^0 \ln(|x|) dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{e^x - 1}} dx, \quad \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{e^x - 1} dx, \\ \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx, \quad \int_{-1}^0 \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x+1}} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^4} dx.$$