3. SUITES RÉCURRENTES D'ORDRE 1 ET 2

Rappels: Une suite arithmétique $\{S_n\}_n$ de raison q est définie par

$$\left\{\begin{array}{l} S_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = q + S_n \end{array}\right.$$

Et on a

$$\sum_{i=0}^{n} S_i = (n+1)\frac{(S_0 + S_n)}{2} = (n+1)\frac{(2S_0 + nq)}{2}$$

Une suite géométrique $\{S_n\}_n$ de raison q est définie par

$$\left\{\begin{array}{l} S_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = qS_n \end{array}\right.$$

Et on a, si $q \neq 1$

$$\sum_{i=0}^{n} S_i = S_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

EXERCICE 3.1.
1) Soit $\{U_n\}_n$ une suite numérique telle que: $U_0 > 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n^2 - 2.$$

1-1) Montrer (par exemple par récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$.
1-2) En supposant que la limite de U_n existe, la calculer.
1-3) Montrer que cette suite est croissante et diverge vers $+\infty$.
2) Soit $\{V_n\}_n$ une suite numérique telle que : $V_0 = \frac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = \frac{V_n^2 + V_n}{2}.$$

2-1) Montrer (par exemple par récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < V_n < 1$.
2-2) En supposant que la limite de V_n existe, la calculer.
2-3) Montrer que cette suite est monotone et étudier sa convergence.

Remarque: *Pour les questions 1) et 2) on pourra tracer les graphes de $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \frac{x^2+x}{2}$, et suivre ainsi la progression des suites $\{U_n\}_n$ et $\{V_n\}_n$.*

EXERCICE 3.2. *Le prix de vente d'une voiture commercialisée en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11600 €. On note: P_n le prix de vente (en euros) de ce modèle l'année $(1995 + n)$.*
1) Montrer que $\{P_n\}_n$ est une suite arithmétique de raison s que l'on précisera.
2) Quel était le prix initial de vente en 1995?
3) A partir de quelle année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10000 €?

4) De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année un de ces modèles. Déterminer la somme totale dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

Exercice 3.3. *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et soit la suite définie par* $X_0 = 1$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \frac{a+1+X_n}{a}.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_{n+1} - X_n$, $Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$.
1) Exprimer Y_n *en fonction de* Y_{n-1}*. En déduire qu'il existe une valeur* a_0 *de* a *pour laquelle* $\{Y_n\}_n$ *est une suite constante.*
2) Montrer que pour tout $a \neq a_0$*, la suite* $\{Y_n\}_n$ *est une suite géométrique dont on donnera la raison.*
3) Calculer $lim_{n\to+\infty} Z_n$ *en fonction de* a*.*
4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 1 + Z_n$*. En déduire la limite de* X_n *pour* n *tendant vers l'infini en fonction des valeurs de* a*.*

Exercice 3.4. *Soit la suite* $\{V_n\}_n$ *définie par*

$$V_0 = a,\ V_1 = b \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+2} = cV_{n+1} + V_n\,,$$

où a*,* b *et* c *sont des paramètres réels.*
1) Suivant les valeurs de c *déterminer* V_n *en fonction de* n*.*
2) Donner les valeurs de a *et* b *pour que la suite* $\{V_n\}_n$ *converge lorsque* $n \to +\infty$*.*