Controle continu M11, session Novembre 2007[1]

Exercice 1

Soit P et Q deux propositions. En utilisant les tables de vérité montrer que

(1)
$$\text{non}\,(P\,\text{et}\,Q) \quad \text{est logiquement équivalent à} \quad \text{non}(P)\,\text{ou}\,\text{non}(Q),$$

(2)
$$\text{non}\,(P\,\text{ou}\,Q) \quad \text{est logiquement équivalent à} \quad \text{non}(P)\,\text{et}\,\text{non}(Q).$$

Soit E un ensemble non vide et soient $A \subset E$, $B \subset E$. Pour un ensemble $Z \subset E$ on note $C_E(Z)$ le complémentaire de Z dans E. Montrer alors que

(3)
$$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B),$$

(4)
$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).$$

Exercice 2

Soient $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$, $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}$. Soit l'application $f : E \to F$ définie par $f(x) = x^2 + 3x + 4$.

(1) Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors f est une application qui n'est ni injective, ni surjective.

(2) Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = [\frac{7}{4}, +\infty[$ alors f est une application qui est surjective mais non injective.

(3) Montrer que si $E = (-\infty, -\frac{3}{2}]$ et $F = [\frac{7}{4}, +\infty[$ alors f est une application bijective. Déterminer f^{-1}.

(4) On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $f(y) = f(x)$.

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Déterminer la classe de zéro cl(0).

TOURNER LA PAGE

[1] Aucun document ni calculette n'est autorisé

Exercice 3

Soit
$$P(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 + ix + \frac{1}{2}i.$$

(1) En sachant que P possède une racine réelle trouver cette racine. Dans la suite, on la note α.

(2) Trouver le polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

(3) Calculer les racines complexes de Q.

(4) Factoriser P dans $\mathbb{C}$.