

Contrôle continu M11, session Décembre 2004¹

Exercice 1 Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On note \bar{A} le complémentaire de A dans E . Démontrer que:

(a)

$$A \subset B \text{ si et seulement si } B \cup \bar{A} = E.$$

(b)

$$(A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}) \text{ si et seulement si } (A \cap B = A \cap C).$$

Exercice 2 Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments. Expliciter toutes les relations que l'on peut définir sur E . Pour chacune de ces relations, donner ses propriétés (reflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, fonction, application, injection, surjection, bijection).

Exercice 3 Soit

$$f : E \rightarrow F, f(x) = e^x + e^{-x}$$

(a) Soit $E = F = R$. Montrer que f est une application qui n'est pas surjective ni injective.

(b) Soit $E = R, F = [2, \infty[$. Montrer que f est surjective.

(c) Soit $E = [0, \infty[, F = [2, \infty[$. Montrer que f est bijective, puis calculer l'application inverse f^{-1} .

(d) Soit $E = F = R$. Soit $A \subset R$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$, puis calculer $f(A)$ et $f^{-1}(f(A))$ pour $A = [0, 1]$.

(e) Soit $E = F = R$. On définit une relation S sur R

$$xSx' \text{ si et seulement si } f(x) = f(x').$$

(i) Montrer que S est une relation d'équivalence.

(ii) Pour tout $x \in R$, trouver la classe de x modulo S et déterminer l'ensemble quotient de R modulo S .

Exercice 3 On considère le polynôme

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

(a) Ecrire la formule de Taylor de P en 1. Montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité α .

(b) Factoriser P sur

(i) sur $C[X]$,

(ii) sur $R[X]$.

¹Aucun document ni calculatrice n'est autorisé