

**Controle continu M11, session Décembre 2005<sup>1</sup>**

**Exercice 1** (4 points)

- 1) Expliquer, par exemple à l'aide d'un tableau de vérité, pourquoi la proposition " $P \Rightarrow Q$ " est équivalente à la proposition " $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ "
- 2) Pour chacune des assertions suivantes indiquez si elle est vraie ou fausse puis justifier votre réponse.
  - a)  $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \leq y$ ,
  - b)  $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x^2 \leq y^2$ ,
  - c)  $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 \geq -1$ ,
  - d)  $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$ .

**Exercice 2** (7 points)

- 1) Déterminer toutes les racines complexes de l'équation  $x^6 - 1 = 0$ . Pour chacune de ces racines on précisera le module, l'argument, la partie réelle et la partie imaginaire.
- 2) Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  de degré 5 (que l'on déterminera en utilisant la division Euclidienne) tel que

$$x^6 - 1 = (x - 1)P(x)$$

- 3) Dédurre des questions précédentes toutes les racines du polynôme  $P$ .
- 4) Factoriser  $P$  sur l'ensemble des complexes puis sur  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 3** (9 points)

- 1) On considère la fonction

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^{x^2+x+1}.$$

- a) Montrer que  $f$  est une application.
- b) Tracer le graphe de l'application  $x \rightarrow x^2 + x + 1$  puis montrer que  $f$  n'est ni surjective ni injective.
- c) On pose  $A = [0, 1]$ . Déterminer  $f(A)$  et  $f^{-1}(f(A))$ . Vérifier que  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .
- d) Montrer que ce résultat est général, c'est à dire que, pour toute application  $g$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  et pour tout sous-ensemble  $A \subset \mathbf{R}$ , on a

$$A \subset g^{-1}(g(A)).$$

---

<sup>1</sup>Aucun document ni calculatrice n'est autorisé

Montrer que  $A = g^{-1}(g(A))$  si et seulement si  $g$  est injective.

e) On considère la relation  $\mathcal{R}$  de  $R$  vers  $R$  définie par

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } f(x) = f(y).$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

Déterminer la classe du réel  $-\frac{1}{2}$  puis celle d'un réel  $x$  quelconque différent de  $-\frac{1}{2}$ .

2) On considère la fonction

$$f : \mathbf{R} \rightarrow [a, \infty[, f(x) = e^{x^2+x+1}.$$

Trouver un réel  $a$  tel que  $f$  soit une application surjective. Est-ce alors une application injective?

3) On considère la fonction

$$f : ]-\infty, b] \rightarrow [e^{\frac{3}{4}}, \infty[, f(x) = e^{x^2+x+1}.$$

- a) Trouver un réel  $b$  tel que  $f$  soit une application bijective.
- b) Déterminer alors l'application réciproque.