Controle continu M11, session Novembre 2006[1]

Exercice 1

Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 + 1$

(1) Déterminer $A = f^{-1}(\{5\})$ et $B = f^{-1}([1, 5])$
(2) Montrer que f est injective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
(3) Déterminer l'intervalle $D = f(\mathbb{R}^+)$.
(4) L'application f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$?
(5) On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $y = f(x)$.
$\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 2

Partie I
(1) Trouver toutes les racines du polynôme

$$P(x) = x^6 + 1.$$

Vérifier que les racines sont conjuguées deux à deux.
(2) Factoriser P dans $\mathbb{R}$.
(3) Factoriser P dans $\mathbb{C}$.
(4) Servez vous de (1) pour factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme

$$Q(x) = x^5 + ix^4 - x^3 - ix^2 + x + i.$$

[Indication: Ecrire $x^6+1 = x^6-i^6$ et utiliser la formule $a^n-b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.]

Partie II
(1) Montrer que $x = 1$ est une racine du polynôme

$$P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$

(2) Calculer son ordre de multiplicité.
(3) Factoriser P à l'aide de la formule de Taylor.

[1] Aucun document ni calculette n'est autorisé