TD: Mathématiques appliquées 2 (semestre 2)

U.F.R. Sciences Économiques et de Gestion

L1 Économie (2016-17)

Cours: J.-M. Barbaroux.
Travaux dirigés: J.-M. Barbaroux & E. Leopold
email: barbarou@univ-tln.fr
web: http://barbarou.univ-tln.fr

Chaque exercice du fascicule de TD est marqué d'un symbole:

- Le symbole ♡ mentionne les exercices fondamentaux; ces exercices sont pour la plupart élémentaires et on trouve leurs solutions dans de nombreux ouvrages de référence ou en ligne. Ces exercices doivent être tous systématiquement préparés. Ils sont indispensables à la bonne *utilisation des méthodes* vues en cours, et sont déjà une première base pour acquérir les notions mathématiques.

- Le symbole ♣ est utilisé pour les exercices de difficulté moyenne. Ce sont en général de bons exercices pour s'entraîner et vérifier que l'on a bien acquis les notions du cours. Ces exercices ne se résolvent pas nécessairement par application directe d'une méthode vue en cours. Ils requièrent de passer un peu plus de temps dessus. C'est avec ces exercices que vous *comprendrez* les notions du cours.

- Le symbole ♠ accompagne les exercices qui présentent souvent plusieurs difficultés. Ils sont utiles pour aller un peu plus loin.

Seuls des exercices de type ♡ et ♣ seront au programme des examens.

1. Systèmes linéaires

Exercice 1.1. ♡ *Dans les équations suivantes, on précise à chaque fois les inconnues. Toute lettre qui n'est pas mentionnée comme inconnue, est à considérer comme coefficient (ou paramètre).*

Dire quelles sont les équations qui ne sont pas linéaires.

(1) $3x + 5y - 7 = 0$, *d'inconnues* x *et* y.
(2) $\mathrm{e}^{x^2+y^2} = 1$, *d'inconnues* x *et* y.
(3) $ax_1 + bx_2 + 3x_3 = -4$, *d'inconnues* x_1, x_2 *et* x_3.
(4) $ax_1 + bx_2 + 3x_3 = -4$, *d'inconnues* a *et* b.
(5) $2xy + y^2 = 0$, *d'inconnue* x.
(6) $2xy + y^2 = 0$, *d'inconnues* x *et* y.

Exercice 1.2. ♡ *Dans chacun deux systèmes suivants, d'inconnues* x_1, x_2, x_3 *et* x_4 *(dans cet ordre), et en conservant l'ordre des lignes donner les valeurs des coefficients* $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, $a_{2,3}$ *et* $a_{3,2}$, *et préciser le second membre de l'équation.*

$$(E_1) \quad \left\{ \begin{array}{lllllr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +ax_4 & = & 1 \\ 3x_1 & & -4x_3 & +\pi x_4 & = & -1 \\ \sqrt{3}x_1 & +(a-2)x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -4x_4 & = & 0 \\ & -x_2 & +x_3 & +\pi^2 x_4 & = & -9 \end{array} \right.$$

$$(E_2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -x_3 + 2x_1 + ax_4 + x_1 - 4 & = 0 \\ 3x_1 - 4x_4 - 1 + \pi x_2 & = 0 \\ \sqrt{3m}\, x_2 + x_1 - \frac{1}{2}x_3 - 4x_4 & = 0 \\ \frac{1}{2} - \pi x_4 + 2x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Exercice 1.3 (Résolution géométrique). ♣ *Soit le système d'équations linéaires suivant*

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} 2x - 3y & = 1 \\ x + y & = 0 \end{array} \right.$$

i) Soit D_1 *la droite d'équation* $2x - 3y = 1$. *Trouver deux points distincts de* D_1. *Tracer la droite* D_1 *sur un repère orthonormé.*
ii) Soit D_2 *la droite d'équation* $x + y = 0$. *Trouver deux points distincts de* D_2. *Tracer la droite* D_2.
iii) Que peut-on conjecturer de l'ensemble des solutions du système (E)*?*
iv) Résoudre ce système (par la méthode de votre choix) et vérifier iii).

Exercice 1.4. ♣ *Soit le système*

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -4x_2 & -\frac{7}{2}x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ & 8x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

i) Montrer que $(1, -1, 2)$ *est une solution de ce système.*
ii) Sans calcul, pouvez-vous dire combien de solutions admet ce système?

Exercice 1.5 (Reconnaître des systèmes échelonnés). ♡ *Pour chaque système d'équations linéaires suivant, dire s'ils sont sous forme échelonnée ou pas. Pour ceux qui ne sont pas échelonnés, est-il possible de les rendre échelonnés par seuls changements d'ordre des inconnues et changements d'ordre des lignes?*

$$(E_1)\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +8x_3 & +\sqrt{5}x_4 & =1 \\ & & 3x_3 & -2x_4 & =-4 \\ & & & +7x_4 & =0 \end{array}\right. \qquad (E_2)\left\{\begin{array}{ll} x_1+x_3-3x_2 & =2 \\ -x_3 & =5 \\ \pi x_3+3x_2 & =1 \end{array}\right.$$

$$(E_3)\left\{\begin{array}{ll} x_3+\sqrt{5}x_4 & =3 \\ x_1+3x_3-2x_4 & =-2 \\ +7x_4 & =0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4 & =1 \end{array}\right. \qquad (E_4)\left\{\begin{array}{ll} -\sqrt{2}x_3+x_4 & =1 \\ 7x_4 & =1 \\ x_1+8x_2 & =1 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4 & =1 \end{array}\right.$$

Exercice 1.6 (Résoudre des systèmes échelonnés). ♡ *Résoudre le système suivant:*

$$(E)\left\{\begin{array}{ll} x_1+x_3-3x_2 & =2 \\ -x_3 & =5 \\ \pi x_3+3x_2 & =1 \end{array}\right.$$

Exercice 1.7 (Résoudre des systèmes échelonnés). ♣ *Résoudre le système suivant:*

$$(E)\left\{\begin{array}{rl} 3x_1-5x_2-2x_3-x_4 & =3 \\ 2x_2-x_3+4x_4 & =0 \\ x_3-2x_4 & =4 \end{array}\right.$$

Indication: Remarquer que la dernière équation de ce système a une infinité de solutions. Dans cette dernière équation, pour chaque valeur de x_4, il existe une valeur de x_3 qui résoudra l'équation. Prendre x_4 comme paramètre, le placer au second membre, et résoudre le système dans les inconnues x_1, x$_2$ et x_3 qui dépendront de x_4.

Exercice 1.8 (Pivot de Gauss). ♡ *Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants:*

$$(E_1)\left\{\begin{array}{c} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+4y+z=0 \end{array}\right. \qquad (E_2)\left\{\begin{array}{c} 3x-y+z=5 \\ x+y-z=-2 \\ -x+2y+z=3 \end{array}\right. \qquad (E_3)\left\{\begin{array}{c} 2x-y+z=4 \\ -x+3y-5z=1 \\ 8x-9y+13z=2 \end{array}\right.$$

Exercice 1.9. ♠ *Résoudre le système d'inconnues x, y, z, et t suivant*

$$(E)\left\{\begin{array}{c} 8x+6y+5z+2t=21 \\ 3x+3y+2z+t=10 \\ 4x+2y+3z+t=8 \\ 7x+4y+5z+2t=18 \\ 3x+5y+z+t=15 \end{array}\right.$$

Indication: pour ce système, on n'est pas obligé de résoudre par un pivot de Gauss. On peut remarquer que $L_2+L_3-L_4$ donne $y=0$ puis poursuivre.

Exercice 1.10. ♣ *Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système d'inconnues x, y et z en fonction des paramètres a, b et c.*

$$(E)\left\{\begin{array}{c} 3x-y+2z=a \\ -x+2y-3z=b \\ x+2y+z=c \end{array}\right.$$

Exercice 1.11. ♣ *Les trois plans d'équations respectives $x_1+2x_2+x_3=4$, $x_2-x_3=1$ et $x_1+3x_2=0$ ont-ils au moins un point d'intersection?*

Exercice 1.12 (Pivot de Gauss). ♣ *Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants:*

$$(E_1)\left\{\begin{array}{l} x_2+4x_3=-5 \\ x_1+3x_2+5x_3=-2 \\ 3x_1+7x_2+7x_3=6 \end{array}\right. \qquad (E_2)\left\{\begin{array}{c} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{array}\right.$$

Exercice 1.13 (Système avec paramètres). ♠ *Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système d'inconnues x, y et z suivant:*

$$(E_2)\left\{\begin{array}{l} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{array}\right., \tag{1}$$

Exercice 1.14 (Modèle d'échange). ♣

On s'intéresse à un système économique supposé fermé comprenant trois secteurs: Acier, Charbon, *et* Électricité. *La sortie (production) annuelle de chacun des secteurs est connue, ainsi que la répartition de ces sorties en direction de chacun des secteurs. Le système étant supposé fermé, la totalité de la production de chaque secteur se répartit entièrement sur les trois secteurs.*

Cette répartition (en %) de la production de chaque secteur est représentée par le tableau suivant:

Distribué par $\longrightarrow$	***C**harbon*	***É**lectricité*	***A**cier*	*Acheté par* $\downarrow$
	0	$0,4$	$0,6$	***C**harbon*
	$0,6$	$0,1$	$0,2$	***É**lectricité*
	$0,4$	$0,5$	$0,2$	***A**cier*

On appelle dépense de production d'un secteur le coût en acier+charbon+électricité correspondant à la production totale de ce secteur. On notera respectivement d_C, d_E et d_A ces trois dépenses de production pour le charbon, l'électricité et l'acier. On notera respectivement p_C, p_E et p_A les trois prix de vente correspondant à la production totale, respectivement, du charbon, de l'électricité et de l'acier.

i) *Expliquer rapidement pourquoi la dépense de production du charbon est donné par $d_C = 0,4p_E + 0,6p_A$.*

ii) *Avec des formules analogues à celle de la question i), exprimer la dépense de production pour les secteurs "acier" et "électricité".*

iii) *On appelle prix d'équilibre, les prix pour lesquels la recette de chaque secteur soit égale à la dépense de chaque secteur, i.e., $d_A = p_A$, $d_C = p_C$ et $d_E = p_E$. Quel système d'équations doivent vérifier les troix prix pour que l'équilibre soit réalisé.*

iv) *Résoudre le système d'équations à l'équilibre. Si, à l'équilibre, la production d'acier coûte* 100 *millions d'euros, quel est le coût de production de l'électricité et celui du charbon.*

2. Calcul matriciel - Déterminants

Exercice 2.1. ♡ *On considère les matrices suivantes:*

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-4\\2&-6&0\\1&4&-3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\2&-3&4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&-1&3\\2&0&0&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-2&0\\3&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$Z=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Dire si on peut calculer les matrices suivantes, et, lorsque c'est possible, effectuer le calcul:

$$A+B,\ A+C,\ A+D,\ B+D,\ 2A,\ A-2B,$$

$$AB,\ BA,\ AC,\ CA,\ AD,\ BC,\ DZ,\ AX,\ A^2,\ DB,\ CD,\ DC,\ I_3A,\ I_3B,\ AI_3.$$

Exercice 2.2. ♡ *Calculer l'inverse des matrices suivantes par la méthode de Gauss-Jordan*

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Réponses:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3. ♣ *Soit*

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^3 *puis* A^4. *Vérifier, pour* $n=1,2,3$ *et* 4 *que l'on a:* $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

Montrer par récurrence sur n *que cette propriété est vraie pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2.4. ♠ *Soient*

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}\quad et\quad B=\begin{pmatrix}0&-3&0\\3&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Calculer AB *et* BA. *Que remarque t'on? Pouvez-vous expliquer ce résultat?*

Exercice 2.5. ♡ *Calculer le déterminant des matrices suivantes:*

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&7\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}2&-6\\1&-3\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.6. ♡ *Calculer le déterminant des matrices suivantes :*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\4&7&1\\5&-1&2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1/2&3/2&1/2\\2/3&0&2/3\\3/4&1&-1/2\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}1&5&9\\3&0&1\\31&5&19\end{pmatrix}.$$

EXERCICE 2.7. ♡ *Calculer le déterminant des matrices suivantes:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer $\mathrm{Det}(CD)$.

EXERCICE 2.8. ♡ *En utilisant la dernière Proposition du Chapitre 3 du cours sur les matrices et déterminants:*
a) Dire quelles familles de vecteurs parmi les suivantes sont des bases de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Rappeler la définition de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. b) Dire quelles familles de vecteurs parmi les suivantes sont des bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \right\}$$

Rappeler la définition de la *base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

Pour les exercices ci-dessous, utiliser les règles de calcul suivantes:
PROPOSITION 2.9. *Soit A et B deux matrices carrées de $\mathfrak{M}_n$.*

(1) Si on intervertit deux lignes de A, on change son déterminant en son opposé.
(2) Si on intervertit deux colonnes de A, on change son déterminant en son opposé.
(3) Si on remplace une ligne de A par elle-même plus une combinaison linéaire des autres lignes, on ne change pas son déterminant.
(4) Si on remplace une colonne de A par elle-même plus une combinaison linéaire des autres colonnes, on ne change pas son déterminant.
(5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathfrak{M}_n$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n A$.
(6) Si on multiplie une ligne (ou une colonne) de A par λ, alors on multiplie son déterminant par λ.
(7) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
(8) Si A a deux lignes identiques, alors $\det(A) = 0$.
(9) Si une ligne de A est combinaison linéaire des autres lignes, alors $\det(A) = 0$.
(10) Si A a deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.
(11) Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det(A) = 0$.
(12) Le déterminant d'une matrice et de sa transposée son égaux: $\det(A) = \det({}^tA)$.

Exemple

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =_{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =_{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

puis on développe par rapport à la première colonne:

$$\Delta_1 = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

On peut alors calculer par la rgle de Sarrus (o faire apparaître des zéros sur la première colonne en faisant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1$), et on trouve -96.

Exercice 2.10. ♣ *Calculer le déterminant suivant:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 2.11. ♣ *Calculer les déterminants suivants:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 13 & 1 \\ 2 & 7 & 27 & 1 \\ 4 & 5 & 45 & 1 \\ 2 & 3 & 23 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2.12. ♠ *Factoriser le polynôme*

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

3. Applications linéaires et Matrices

Exercice 3.1. ♡

i) Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x$, *est une application linéaire.*
ii) Montrer que $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h((x_1, x_2, x_3)) = x_1 - 2x_2 + 4x_3$ *est une application linéaire.*
iii) Montrer que $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $h((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_2; 3x_3 - x_1)$ *est une application linéaire.*