8. Extrema liés

Exercice 8.1. ♡ *Chercher les extrema locaux de la fonction* $f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ *sous la contrainte* $x + 2y = 24$ *(on notera* $g(x,y) = x + 2y$*).*
i) Ecrire le Lagrangien associé
Réponse: Les fonctions f *et* g *étant des fonctions polynômes dans les variables* (x,y)*, elles sont définies sur* $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$*, qui est un ouvert. De plus* f *et* g *sont indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}^2$*. On peut donc appliquer les résultats vus en cours.*
On a: $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\,(g(x,y) - 24) = 5x^2 + 6y^2 - xy - \lambda(x + 2y - 24)$.
ii) Calculer les dérivées partielles du Lagrangien et déterminer les points critiques (points stationaires).
Réponse: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 10x - y - \lambda$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 12y - x - 2\lambda$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 24 - x - 2y$.
Un point (x,y,λ) *est stationnaire si et seulement si*

$$\begin{cases} 10x - y - \lambda = 0 \\ 12y - x - 2\lambda = 0 \\ 24 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

Dans cet exemple, le système obtenu est linéaire. On le résout par exemple par la méthode du pivot de Gauss. On obtient comme seul point critique: $(x,y,\lambda) = (6,9,51)$.
iii) Déterminer la Hessienne bordée et en déduire la nature des points critiques.
La Hessienne bordée est

$$H(\mathcal{L}) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La valeur de la hessienne bordée au point critique est identique.
Le déterminant de la hessienne bordée $H(\mathcal{L})|_{(6;9;51)}$ *est* -52 *qui est strictement négatif. On en déduit que le point* $(x,y) = (6,9)$ *est un minimum local.*

Exercice 8.2. ♡ *Chercher les extrema locaux de la fonction* f *sous contrainte*

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 6 \\ x_1^2 + x_2^2 = 8 \quad \textit{(contrainte)} \end{cases}$$

Réponse: *On trouve 4 points critiques* (x_1,x_2,λ)*:*
$(0;2\sqrt{2};-1)$, $(0;-2\sqrt{2};-1)$, $(2\sqrt{2};0;1)$ *et* $(-2\sqrt{2};0;1)$.
La hessienne bordée est

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 0 & -2x_1 \\ 0 & -2(1+\lambda) & -2x_2 \\ -2x_1 & -2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du déterminant de la hessienne bordée évaluée aux points critiques implique que $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ *sont des maximums locaux et* $(0, \pm 2\sqrt{2})$ *sont des minimums locaux.*

Exercice 8.3. ♡ *Sans utiliser la méthode de Lagrange, résoudre*

$$\begin{cases} \max f(x,y) \quad \textit{où} \quad f(x,y) = (-x^2 + xy - y^2) \\ x - 2y = 3 \quad \textit{(contrainte)} \end{cases}$$

Retrouver le résultat en utilisant la méthode de Lagrange.
Réponse: *On trouve comme unique maximum le point* $(0, -2/3)$*. C'est un maximum global.*

Exercice 8.4. ♡ *Chercher les extrema de la fonction* $f(x,y) = x + 2y$ *sous la contrainte* $x^2 + y^2 = 5$.