L1 MASS - **M11** (2007-08)

Un petit coup de main pour ceux qui sèchent

[1]

I Logique - II Ensemble.

Exercice 1.

(1) C'est une assertion quantifiée. Pour montrer qu'elle est fausse, commencez par écrire sa négation (en respectant scrupuleusement les règles énoncées en cours de M11 et de méthodologie); montrez ensuite que cette négation est vraie.

(2) Comme pour le (1). Notez d'ailleurs que la méthode de preuve utilisée est un *raisonnement par contre-exemple.*

(3) Pour cette question, on supposer connue (et bien définie) la notion de partie entière d'un rel. Commencez d'ailleurs par (re)trouver la définition de *partie entière.*

(4) Ça commence à chauffer! Commencez par comprendre ce que cette phrase mathématique veut dire. Puis essayez de vous convaincre que c'est vrai.

Compréhension de l'assertion: On commence à lire cette phrase par la gauche:

$$\exists n \in \mathbb{N}, \textit{blablabla}$$

On cherche donc à trouver (au moins) une valeur entière n qui va vérifier *blablabla.* Comme on veut montrer que l'assertion est vraie, cela signifie qu'il va falloir donner une valeur de n pour laquelle *blablabla* est vraie. Il faut maintenant regarder ce que *blablabla* veut dire:

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \textit{blabla}$$

Ce morceau signifie que pour toutes les valeurs de p entières (0 y compris), on veut que la propriété *blabla* soit vraie.

On récapitule pour l'instant notre lecture de l'assertion:

$\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, *blabla* veut dire qu'il nous faut trouver une valeur de $n \in \mathbb{N}$ (qui sera alors fixée une fois pour toute) et pour laquelle on va pouvoir affirmer que si je prends une valeur quelconque de $p \in \mathbb{N}$, je pourrais affirmer que *blabla* est vraie. Reste à savoir ce que *blabla* veut dire:

$$n > p \Rightarrow n + p > 2p\ .$$

Ça c'est facile! si n est strictement plus grand que p (pour ce n qu'on va choisir et qui sera fixé, et pour n'importe quel p entier) alors on aura nécessairement $n + p > 2p$. Ouf!

Maintenant qu'on a compris ce qu'on nous raconte, on peut montrer que c'est vrai.

On démontre que l'assertion est vraie: Comme il faut commencer par trouver $n \in \mathbb{N}$ qui va faire le job *blablabla*, on peut tenter de prendre une valeur et voir si ça fonctionne. On va éviter $n = 0$ qui va nous compliquer la tâche. Essayons plutôt avec $n = 1$. En avant! Pour $n = 1$ montrez que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (1 > p \Rightarrow 1 + p > 2p)$$

Voilà. Quand vous avez fini, essayez de voir ce que signifie la phrase où on a interverti l'ordre des quantificateurs:

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n > p \Rightarrow n + p > 2p)$$

(5) De plus en plus dur! Cette assertion est vraie. Commencez par constater que $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Au fait, vous souvenez vous de ce qu'est la valeur absolue d'un nombre réel?

(6) Un café offert à ceux qui montrent que c'est faux. (et un restau à ceux qui montrent que c'est vrai...)

(15) Utilisez simplement la table de vérité qu'on vous a donnée dans le cours. Repérez juste la ligne correspondant aux valeurs de vérité de P = "$1 > 2$" et Q = "$23 = 5$". A votre avis, pourquoi on vous a posé cet exercice un peu curieux?

[1] Jean-Marie Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr

Ci-dessous la négation des énoncés (1) à (8) de l'exercice 1, et la valeur de vérité pour cette négation.

(1)	$\exists x \in \mathbb{R},\ x \leq 1$	(V)
(2)	$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2+n+1 \leq n^3$	(V)
(3)	$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n < x$	(F)
(4)	$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n > p$ et $n+p \leq 2p$	(F)
(5)	$\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \lvert x-3\rvert < \frac{1}{p}$ et $\lvert x^2-9\rvert \geq \frac{1}{n}$	(F)
(6)	$\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lvert y-x\rvert < \frac{1}{p}$ et $\lvert y^2-x^2\rvert \geq \frac{1}{n}$	(V)
(7)	$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ n > p$ et $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{n}$	(F)
(8)	$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big((x,y) \neq (0,0)$ et $x^2+xy+y^2 \leq 0\big)$ ou $\big(x^2+xy+y^2 > 0$ et $(x,y) = (0,0)\big)$	(F)

Exercice 2. Commencez par relire les définitions de *réunion* et d'*intersection*.

Pour la première égalité. Aidez-vous d'un dessin. Tracez pour $x=0$, puis $x=1/3$, puis $x=1/2$, puis $x=1$. Comme on parle de la réunion, regardez maintenant l'ensemble que vous obtenez rien qu'en considérant ces quatre valeurs de x (attention à ce qui se passe au bord). Vous avez deviné ce que cela devrait donner si on faisait la réunion pour tous les x? Bien. Il reste à montrer que ce que vous avez pensé être la bonne réponse est vrai.

Comme il faut montrer une égalité entre deux ensembles, on va procéder comme 9 fois sur 10 dans ce cas là: on montre deux inclusions.

Pour l'autre question, la réponse est $\emptyset$. Là aussi il faut montrer a priori deux inclusions. Sauf que pour l'inclusion $\emptyset \subset \bigcap_{x\in[0,1]}]x/2, 2x[$, il n'y a rien à faire, puisque l'ensemble vide est toujours inclus dans n'importe quel ensemble. Il n'y a donc qu'une inclusion à montrer (*rappel:* $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$).

Exercice 3. Commencez par considérer le cas simple où $I = \{1,2\}$, et $J = \{1,2\}$, c'est à dire, montrez que

$$\big(A_1 \cup A_2\big) \cap \big(B_1 \cup B_2\big) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cup B_2) \cup (A_2 \cup B_1) \cup (A_2 \cup B_2).$$

Notez en passant que c'est bien cela que signifie $\bigcup_{i,j\in\{1,2\}\times\{1,2\}}$: on collecte tous les couples (i,j) possibles avec i dans $\{1,2\}$ et j dans $\{1,2\}$, et on fait la réunion sur tous ces couples (i,j) des ensembles $A_i \cup A_j$.

Pour montrer que c'est vrai on va bien entendu montrer deux inclusions. On va aussi utiliser la définition d'intersection et de réunion. Ainsi, dire qu'un élement x est dans $A_1 \cup A_2$, cela signifie qu'il est au moins dans une des deux ensembles. Pareil pour $B_1 \cup B_2$. Et comme être dans une intersection d'ensemble, c'est dire qu'on est dans les deux à la fois, dire que $x \in \big(A_1 \cup A_2\big) \cap \big(B_1 \cup B_2\big)$ c'est dire qu'il est au moins dans l'un des A_i et aussi (intersection) dans l'un des B_j.

Exercice 5. Pour chacune des questions posées, faites un dessin pour comprendre ce qui se passe.

Et souvenez vous que souvent, pour montrer une égalité d'ensemble, on montre deux inclusions.

Pour l'équivalence, montrez deux implications.

Exercice 6. Faites un dessin avec trois ensembles A_1, A_2 et A_3 pour comprendre ce qui se passe. Montrez deux inclusions.

Exercice 7. Là aussi, faites un dessin avec trois ensembles A_1, A_2 et A_3 pour voir ce qui se passe.