[1]

III. Relation, fonction, application.

Exercice 8. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants:

$$[0,1], \quad]-1,4[, \quad [0,+\infty[, \quad]-\infty,5].$$

Réponse. On verra plus tard comment répondre à cette question en utilisant un tableau de variation et le *théorème des valeurs intermédiaires.* Pour l'instant, on résoud le problème directement par le calcul.

• L'ensemble $f^{-1}([0,1])$ est par définition l'ensemble des x de l'ensemble de départ $\mathbb{R}$, qui vérifient $f(x) \in [0,1]$.

On résoud donc

$$\begin{aligned} f(x) \in [0,1] &\Leftrightarrow \quad 0 \leq 1 + x^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \leq x^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \ , \end{aligned}$$

car le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.

On a donc

$$f^{-1}([0,1]) = \{0\}.$$

• On procède de même pour la question suivante:

$$\begin{aligned} f(x) \in]-1,4[\quad &\Leftrightarrow \quad -1 < 1 + x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x^2 < 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \ , \end{aligned}$$

Donc

$$f^{-1}(]-1,4[) =]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$$

• De même le calcul donne

$$f^{-1}([0,+\infty[) = \mathbb{R}, \quad f^{-1}(]-\infty,5]) = [-2,2] \ .$$

Exercice 9 (image réciproque et image directe). Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soient $A := [-2,1]$ et $B = [-1,4]$.
1) Calculer $f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(A))$ puis comparez ces deux ensembles et A.
2) Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$
3) Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.

Réponse.

1) On commence par déterminer $f(A)$. Par définition, $f(A)$ est l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ lorsque x parcourt l'ensemble A. On a

$$-2 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 4 \ ,$$

et réciproquement, pour tout $y \in [0,4]$, on peut trouver (au moins) une valeur de x dans $[-2,1]$ (prendre $x = -\sqrt{y}$ par exemple) telle que $y = x^2$. Ainsi,

$$f(A) = [0,4] \ .$$

Par un calcul similaire à ceux de l'exercice 8, on trouve:

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,4]) = [-2,2].$$

De même on trouve

$$f^{-1}(A) = [-1,1],$$

[1]Jean-Marie Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr

et

$$f(f^{-1}(A)) = f([-1,1]) = [0,1]$$

On a donc obtenu dans ce cas précis les relations

$$f(f^{-1}(A)) \subset A \quad \text{et} \quad A \subset f^{-1}(f(A)).$$

Ces relations sont vraies en général (c.f. exercice 11).

2) On a $A \cap B = [-1,1]$ et le calcul donne $f(A \cap B) = [0,1]$.

On a d'autre part $f(A) = f([-2,1]) = [0,4]$ et $f(B) = f([-1,4]) = [0,16]$. Ainsi, $f(A) \cap f(B) = [0,4]$.

On a donc montré dans ce cas particulier $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Cette relation est vraie en général (c.f. exercice 10 question 2))

3) On montre

$$f(A \cup B) = f([-2,4]) = [0,16]$$

et

$$f(A) \cup f(B) = f([-2,1]) \cup f([-1,4]) = [0,4] \cup [0,16] = [0,16].$$

ce qui montre ici

$$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B).$$

Cette relation est vraie en général (c.f. exercice 10 question 2)).

Exercice 11. Soient E et F deux ensembles non vides. Soit f une *application* de E dans F.

1) Montrer que: $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

2) Montrer que: $\forall B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Réponse.

1) Soit A un sous-ensemble quelconque de l'ensemble de départ E. Soit x_0 un élément de A. On va montrer que $x_0 \in f^{-1}(f(A))$. (faites un shéma pour comprendre le raisonnement)

On considère $y_0 = f(x_0)$. Alors, par définition de $f(A)$, on a évidemment $y_0 \in f(A)$. De plus, puisque y_0 est l'image par f de x_0, on sait que y_0 admet au moins un antécédent par f, à savoir x_0. Ce qui signifie que $f^{-1}(f(A))$ contient l'élément x_0.

2) Soit B un sous-ensemble quelconque de l'ensemble d'arrivée F. Par définition, $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B. Donc, si on prend un élément x_0 dans $f^{-1}(B)$, son image $f(x_0)$ est dans B. Cela montre que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.