[1]

IV. Composition, réciprocité

Exercice 1. Soient f, g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par:

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 7x^2 - 2.$$

Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Réponse.

• Soit y quelconque dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. On veut montrer que y admet un antécedent et un seul par f dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}$. On aura ainsi montré que l'application f est injective et surjective, donc bijective, et par conséquent inversible.

Pour déterminer l'ensemble des antécédents de y par f, on résoud

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2},$$

ce qui démontre que y admet un antécédent unique $\frac{y-1}{2}$ par f. Ce calcul, qui montre que f est bijective, nous permet aussi d'obtenir une expression de l'application f^{-1} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \ .$$

(on peut aussi écrire $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$).

• Pour montrer que g n'est pas inversible (donc pas bijective) on va montrer qu'elle n'est pas surjective. Pour cela, il suffit de remarquer que quelle que soit la valeur de x dans $\mathbb{R}$, on a toujours $g(x) = 7x^2 - 2 \geq -2$. Donc, $y = -3$ (par exemple) n'admet pas d'antécédent par g.

(On aurait pu montrer aussi que g n'était pas injective en remarquant par exemple que 5 admet deux antécédents 1 et -1 par g).

• Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a:

$$(g \circ f)(x) = g\Big(f(x)\Big) = g(2x+1) = 7\left((2x+1)^2\right) - 2 = 28x^2 + 28x + 5 \ ,$$

et

$$(f \circ g)(x) = f\Big(g(x)\Big) = f(7x^2 - 2) = 2\left(7x^2 - 2\right) + 1 = 14x^2 - 3 \ .$$

Exercice 8. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1 + x + x^2 \ ,$$

admet-elle une application réciproque?

Réponse. Non, car elle n'est pas surjective. En effet, on peut remarquer que 0 n'a pas d'antécédent. En effet, l'équation

$$0 = 1 + x + x^2 \ ,$$

n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ (le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = -3$ est strictement négatif).

Exercice 6 (réciproque du sinus hyperbolique). Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \ .$$

Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera)

Réponse. Soit y quelconque dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. On veut montrer qu'il existe un élément x et un seul dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}$ qui vérifie $y = f(x)$. Pour cela, on résoud donc l'équation $y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, d'inconnue x (et de paramètre y).

[1]Jean-Marie Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr

On pose d'abord $u = \mathrm{e}^x$, et on remarque que $1/u$ est toujours bien défini car $u \neq 0$, et $1/u = \mathrm{e}^{-x}$. Résoudre $y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ revient donc à résoudre $y = \frac{u - \frac{1}{u}}{2}$, d'inconnue $u \geq 0$.

$$y = \frac{u - \frac{1}{u}}{2a} \Leftrightarrow 2yu = u^2 - 1 \Leftrightarrow u^2 - 2uy - 1 = 0.$$

La dernière équation est une équation du second degré en u, de paramètre y. Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac = (-2y)^2 + 4$. Donc on a toujours $\Delta > 0$. L'équation admet donc deux solutions distinctes:

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{(2y)^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

On ne conserve que la solution qui est positive (car on cherche u positif), ce qui donne

$$u = y + \sqrt{y^2 + 1}\ .$$

En utilisant $u = \mathrm{e}^x$, on obtient donc

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

Ainsi, y admet un antécedent et un seul $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$ par f dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que f est inversible et f^{-1} est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)\ .$$

Exercice 7. Soient les applications f de $\mathbb{R}$ dans $]-1, +1[$ et g de $]-1, +1[$ dans $\mathbb{R}$ définies par:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} \quad \text{et} \quad g(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}\ .$$

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis en déduire que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Réponse.

i) L'application $f \circ g$ est définie de $]-1, +1[$ dans $]-1, +1[$ par

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}) = \frac{\mathrm{e}^{2 \times \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}} - 1}{\mathrm{e}^{2 \times \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}} + 1} = \frac{\frac{1+y}{1-y} - 1}{\frac{1+y}{1-y} + 1} = y$$

L'application $g \circ f$ est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$(g \circ f)(x) \quad = \quad g(f(x)) = g\left(\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}}{1 - \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) = x$$

ii) Pour montrer que f est inversible, de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$, on va procéder comme d'habitude. Soit y dans l'ensemble d'arrivée $]-1, 1[$. On va montrer qu'il existe un et un seul x dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

• Pour l'existence d'un tel x, il suffit de noter que si on choisit $x = g(y)$ (qui est toujours bien défini puisque $y \in]-1, 1[$), on obtient l'égalité voulue:

$$f(x) = f(g(y)) = y,$$

où on a utilisé le résultat de i).

• Montrons maintenant qu'un tel x est unique. Pour cela on va supposer qu'il existe a priori deux éléments x_1 et x_2 qui vérifient $y = f(x_1)$ et $y = f(x_2)$, et on va montrer qu'ils sont en fait égaux:

$$y = f(x_1) \text{ et } y = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2\ ,$$

puisque d'après i) on a $g(f(x_1)) = x_1$ et $g(f(x_2)) = x_2$. Ceci conclut la preuve de l'unicité de l'antécédent de y par f. □