

## V. Relations d'équivalence.

**Exercice 2.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides et  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

- 1) Montrer que  $\{f^{-1}(\{y\})\}_{y \in f(E)}$  forme une partition de  $E$ .
- 2) Montrer que la famille  $\{\{f(x)\}_{x \in E}\}$  forme une partition de  $F$  si et seulement si  $f$  est une bijection.

**Réponse.**

1) Pour montrer que  $\{f^{-1}(\{y\})\}_{y \in f(E)}$  forme une partition de  $E$ , il faut montrer d'une part que deux ensembles quelconques  $\{f^{-1}(\{y\})\}$  et  $\{f^{-1}(\{y'\})\}$  sont disjoints si  $y \neq y'$ , et il faut montrer d'autre part que la réunion de tous les ensembles  $\{f^{-1}(\{y\})\}$ , quand  $y$  parcourt  $f(E)$ , donne l'ensemble  $E$ .

• Montrons d'abord le premier point à l'aide d'un raisonnement par l'absurde: Soient  $y \neq y'$  deux éléments quelconques de  $f(E)$ . Supposons que  $\{f^{-1}(\{y\})\}$  et  $\{f^{-1}(\{y'\})\}$  ne sont pas disjoints; cela signifie qu'ils possèdent au moins un élément commun  $x$ . Pour cet élément  $x$  on a donc:

$$x \in \{f^{-1}(\{y\})\} \text{ implique } f(x) = y,$$

et

$$x \in \{f^{-1}(\{y'\})\} \text{ implique } f(x) = y'.$$

Or il n'est pas possible que  $x$  admette deux images  $y$  et  $y'$  distinctes par  $f$ , car  $f$  est une fonction.

On en déduit donc que nécessairement  $\{f^{-1}(\{y\})\}$  et  $\{f^{-1}(\{y'\})\}$  sont disjoints.

• Pour démontrer le deuxième point, c'est à dire  $\bigcup_{y \in f(E)} \{f^{-1}(\{y\})\} = E$ , il suffit de montrer  $E \subset \bigcup_{y \in f(E)} \{f^{-1}(\{y\})\}$ , puis que l'autre inclusion est évidente.

Soit  $x \in E$ . On pose  $y = f(x)$ . Pour cet  $y$ , puisque  $y = f(x)$ , on a  $x \in \{f^{-1}(\{y\})\}$  et  $y \in f(E)$ . Ainsi, pour  $x$  quelconque dans  $E$ , on a montré que  $x \in \bigcup_{y \in f(E)} \{f^{-1}(\{y\})\}$ , ce qui implique  $E \subset \bigcup_{y \in f(E)} \{f^{-1}(\{y\})\}$ .  $\square$

2) Pour montrer cette équivalence, on va montrer deux implications.

• Montrons d'abord:  $(f \text{ surjective}) \Rightarrow (\{\{f(x)\}_{x \in E}\} \text{ forme une partition de } F)$ .

On suppose  $f$  bijective. Pour  $x$  et  $x'$  deux éléments quelconques de  $E$  tels que  $x \neq x'$ , les deux singletons (ensembles constitués d'un seul élément)  $\{f(x)\}$  et  $\{f(x')\}$  sont disjoints puisque d'après l'injectivité de  $f$ , on a forcément  $f(x) \neq f(x')$ .

D'autre part, pour  $y$  élément quelconque de  $F$ , puisque  $f$  est surjective, il existe  $x'$  dans  $E$  tel que  $y = f(x')$ , ce que l'on peut écrire aussi  $y \in \{f(x')\}$ . Donc,  $y \in \bigcup_{x \in E} \{f(x)\}$ . On a donc  $F \subset \bigcup_{x \in E} \{f(x)\}$ . L'autre inclusion étant évidente, on a  $F = \bigcup_{x \in E} \{f(x)\}$ .  $\square$

• L'autre implication à montrer est:  $(\{\{f(x)\}_{x \in E}\} \text{ forme une partition de } F) \Rightarrow (f \text{ surjective})$ . *sans correction.*

**Exercice 3.** Soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ou } x = y).$$

$\mathcal{R}$  est-elle une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}$ ?

**Réponse.**

On va montrer que  $\mathcal{R}$  n'est pas transitive. Pour cela, on choisit  $x = 1$ ,  $y = 0$  et  $z = 1/2$ . On a

$$x^2 + y^2 = 1 \leq 1, \text{ donc } x\mathcal{R}y,$$

et

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{4} \leq 1, \text{ donc } y\mathcal{R}z.$$

<sup>1</sup>Jean-Marie Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr

Par contre,

$$x \neq z \text{ et } x^2 + z^2 = \frac{5}{4} > 1 ,$$

donc  $x$  n'est pas en relation avec  $z$ . Ceci montre que  $\mathcal{R}$  n'est pas transitive, et donc que ce n'est pas une relation d'équivalence.

**Exercice 4.** Soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\max\{|x|, |y|\} \leq 1 \text{ ou } x = y).$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}$ . Préciser autant que possible la classe de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$ .

**Réponse.**

• réflexivité: Soit  $x$  quelconque dans  $\mathbb{R}$ , alors  $x = x$ , donc  $(\max\{|x|, |x|\} \leq 1 \text{ ou } x = x)$  est toujours vrai, ce qui implique  $x\mathcal{R}x$ .

• symétrie: Soient  $x$  et  $y$  quelconques dans  $\mathbb{R}$ .

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow (\max\{|x|, |y|\} \leq 1 \text{ ou } x = y) \Rightarrow (\max\{|y|, |x|\} \leq 1 \text{ ou } y = x) \Rightarrow y\mathcal{R}x ,$$

donc  $\mathcal{R}$  est bien réflexive.

• transitivité:

Soient  $x, y$  et  $z$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ . On veut montrer que  $x\mathcal{R}z$ . Pour cela, on va distinguer 4 cas possibles, selon que  $x$  et  $y$  d'une part puis  $y$  et  $z$  d'autre part, vérifient la première propriété (avec le max) ou la deuxième propriété (légalité) de la relation  $\mathcal{R}$ .

- 1er cas:  $x = y$  et  $y = z$ . Alors on obtient tout de suite  $x = z$  et cela implique  $x\mathcal{R}z$ .

- 2ème cas:  $x = y$  et  $\max\{|y|, |z|\} \leq 1$ . Alors on obtient tout de suite  $\max\{|x|, |z|\} \leq 1$ , et donc  $x\mathcal{R}z$ .

- 3ème cas:  $\max\{|x|, |y|\} \leq 1$  et  $y = z$ . Alors on a  $\max\{|x|, |z|\} \leq 1$  ce qui entraîne  $x\mathcal{R}z$ .

- 4ème cas:  $\max\{|x|, |y|\} \leq 1$  et  $\max\{|y|, |z|\} \leq 1$ . La première propriété implique à la fois  $|x| \leq 1$  et  $|y| \leq 1$ . La deuxième implique  $|y| \leq 1$  et  $|z| \leq 1$ . On a donc que le maximum de  $|x|$  et  $|z|$  est inférieur à 1 (puisque chacun de ces deux nombres est inférieur à 1). D'où  $\max\{|x|, |z|\} \leq 1$ , ce qui implique  $x\mathcal{R}z$ .

Ainsi, dans tous les cas possibles, on obtient  $x\mathcal{R}z$ . Cela entraîne que  $\mathcal{R}$  est transitive.  $\square$