[1]

VI. Relations d'ordre.

Exercice 1. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \big(x = y \text{ ou } (x = 0 \text{ et } y = 1)\big).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des majorants d'un singleton $\{x\}$. L'ordre est-il total?

Réponse.
• Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre:
Réflexivité: Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a $x = x$, donc $x\mathcal{R}x$.
Antisymétrie: Soient x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Comme $x\mathcal{R}y$, cela signifie que soit $x = y$, et c'est fini (puisque l'objectif est de montrer justement que $x = y$), soit $x = 0$ et $y = 1$. Mais cette deuxième possibilité ne peut pas arriver, puisque l'autre relation $y\mathcal{R}x$ implique forcément que $y = x$ ou $y = 0$ et $x = 1$, ce qui ne peut pas se réaliser si $x = 0$ et $y = 1$. Ainsi, seule la possibilité $x = y$ reste.
Transitivité: Soient x, y et z trois réels tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Comme dans l'exercice 4 du paragraphe V, on va distinguer quatre cas, et pour chacun d'eux, montrer que $x\mathcal{R}z$.
- 1er cas: $x = y$ et $y = z$. On conclut tout de suite que $x = z$ et donc $x\mathcal{R}z$.
- 2ème cas: $x = y$ et $(y = 0$ et $z = 1)$. Cela implique $x = 0$ et $z = 1$, et donc $x\mathcal{R}y$.
- 3ème cas: $(x = 0$ et $y = 1)$ et $y = z$. Ce cas là implique aussi $x = 0$ et $z = 1$, et donc $x\mathcal{R}z$.
- 4ème cas: $(x = 0$ et $y = 1)$ et $(y = 0$ et $z = 1)$. De toute évidence, à cause des conditions sur y, ce cas là ne peut pas se réaliser.

• Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble des majorants du singleton $\{x_0\}$, c'est à dire, on cherche l'ensemble des réels y, tels que $x\mathcal{R}y$ pour tout élément x de $\{x_0\}$. L'ensemble $\{x_0\}$ étant réduit au seul élément x_0, on cherche donc l'ensemble des élements y tels que

$$x_0\mathcal{R}y.$$

1er cas: $x_0 \neq 0$. Alors, la seule possibilité pour que $x_0\mathcal{R}y$ soit réalisé est que $x_0 = y$. Donc, l'ensemble des majorants de $\{x_0\}$ pour la relation $\mathcal{R}$ est réduite au seul point x_0 dans ce cas.
2ème cas: $x_0 = 0$. On trouve deux majorants: $y = 0$ (car alors $x_0 = y$ et donc $x_0\mathcal{R}y$) et $y = 1$ (car alors $x_0 = 0$ et $y = 1$, et donc $x_0\mathcal{R}y$).

• La relation $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre total. Pour montrer cela, il nous suffit de trouver deux éléments x et y qui ne sont pas en relation. On prend par exemple $x = 2$ et $y = 3$.

Exercice 10 (relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$). Quelle est la borne supérieure de

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ est rationnel et } x^2 \leq 2\}?$$

Montrer qu'il n'existe pas de plus grand élément de A.

Réponse. On commence par déterminer l'ensemble des majorants de A. Un réel M est un majorant de A s'il est dans l'ensemble $\mathbb{R}$ et s'il est supérieur ou égal à tout rationnel x vérifiant $x^2 \leq 2$.
Le réel $\sqrt{2}$ est un majorant de A, car $x^2 \leq 2$ est équivalent à $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Montrons qu'il n'existe pas de majorant de A qui soit strictement inférieur à $\sqrt{2}$.
Soit M un réel tel que $M < \sqrt{2}$. Alors M n'est pas un majorant de A car il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ **dans l'ensemble** A, tel que $M < \frac{p}{q}$.

[1]Jean-Marie Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr

[*Remarque:* L'existence d'un tel rationnel $\frac{p}{q}$ est garanti par les propriétés de $\mathbb{R}$. En particulier on sait que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < x + \epsilon$, c'est à dire qu'on peut toujours trouver un rationnel arbitrairement proche d'un réel donné. Dans le cas présent (i.e., $x = \sqrt{2}$), on peut essayer de le *construire* en considérant une approximation à 10^{-n} près, pour n assez grand en fonction de M.]

Ainsi, on a montré que l'ensemble des majorants de A est

$$[\sqrt{2}, +\infty[\; .$$

Par définition, la borne supérieure de A est l'élément minimal de cet ensemble, c'est à dire, le plus petit des majorants. On trouve donc

$$\sup A = \sqrt{2}.$$

- On peut montrer que A n'admet pas délément maximal à l'aide d'une preuve par l'absurde. On suppose qu'il existe $\frac{p}{q}$ élément de A tel que $\frac{p}{q}$ soit un majorant de A. On montre alors avec des arguments similaires à la première question qu'il existe $\frac{p'}{q'}$ dans A tel que

$$\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} < \sqrt{2}.$$

Exercice supplémentaire Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. Montrer:

$$\sup (A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \; .$$

Réponse. On appelle $a = \max\{\sup A, \sup B\}$. Le réel a est donc le maximum entre $\sup A$ et $\sup B$. Pour montrer que a est la borne supérieure de $A \cup B$, on va montrer que a est un majorant de $A \cup B$, et on va montrer que c'est le plus petit.

Preuve de "a majorant de $A \cup B$": Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, on a, par définition de la borne supérieure de A: $x \leq \sup A$. De même, si $x \in B$, on obtient $x \leq \sup B$. Donc, dans tous les cas, on obtient que x est inférieur ou égal au plus grand des deux réels $\sup A$ et $\sup B$. Ceci montre

$$x \leq \max\{\sup A, \sup B\} = a \; ,$$

et donc a est un majorant de $A \cup B$, puisqu'il est plus grand que n'importe quel élément x de $A \cup B$.

Preuve de "a est le plus petit des majorants": Soit $a' < a$. On va montrer que a' n'est pas un majorant de $A \cup B$. Si on a $\sup A \leq \sup B$, l'inégalité $a' < a$ implique $a' < \sup B$. Par définition de $\sup B$, il existe toujours (au moins) un réel r dans B tel que $a' \leq r < \sup B$. On a donc trouvé un élement $r \in A \cup B$ tel que $a' < r$. Cela montre que a' n'est pas majorant de $A \cup B$. De même, si on a $\sup B < \sup A$, on arrive à la même conclusion. Cela prouve que a est le plus petit des majorants. $\square$