

VII. Fonctions polynomiales.

Exercice 4. Trouver toutes les solutions complexes des équations

(E1) $z^2 + 2z + (1 - 2i) = 0$,

(E2) $z^2 + 2(1 + i)z - 5(1 + 2i) = 0$,

(E3) $z^2 + 2(1 - 2i)z - 8 + \sqrt{3}$,

(E4) $z^2 - (5 + 3i)z + 7i + 4 = 0$,

(E5) $z^6 + z^3(z + 1)^3 + (z + 1)^6 = 0$ (poser $x := 1 + \frac{1}{z}$).

Réponse.

(E5). Comme $z = 0$ n'est pas racine de (E5), on peut résoudre, de façon équivalente, l'équation (E5) où on aura divisé chaque membre par z^6 . On obtient

$$\frac{z^6}{z^6} + \frac{z^3}{z^3} \frac{(z+1)^3}{z^3} + \frac{(z+1)^6}{z^6} = 1 + \left(\frac{z+1}{z}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z}\right)^6 = 1 + \left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{z}\right)^6 = 0.$$

On pose comme inconnue auxiliaire, $x = 1 + \frac{1}{z}$. On est donc amené à résoudre l'équation

$$1 + x^3 + x^6 = 0.$$

On pose ensuite $X = x^3$; il faut et il suffit donc de résoudre

$$1 + X + X^2 = 0.$$

Le discriminant pour cette équation est $\Delta = 1 - 4 \times 1 = -3$, dont les deux racines deuxièmes sont $\delta = i\sqrt{3}$ et $-\delta = -i\sqrt{3}$ (et on a $\delta^2 = (-\delta)^2 = \Delta$). Les deux solutions (complexes) de l'équation en X sont donc

$$X_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Il faut maintenant en déduire les valeurs associées de x . On doit donc résoudre les deux équations en x :

$$x^3 = X_1 \quad \text{et} \quad x^3 = X_2.$$

Cherchons d'abord les racines troisièmes de X_1 . Pour cela, on doit écrire X_1 sous sa forme polaire, c'est à dire, déterminer son module $|X_1|$ et son argument $\arg(X_1)$.

$$|X_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

et

$$\cos(\arg(X_1)) = \frac{\operatorname{Re}(X_1)}{|X_1|} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\arg(X_1)) = \frac{\operatorname{Im}(X_1)}{|X_1|} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ce qui donne $\arg(X_1) = -\frac{2\pi}{3}$. Les trois racines troisièmes de X_1 sont donc

$$x_0 = e^{-\frac{2i\pi}{9} + 0 \times \frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{9}}, \quad x_1 = e^{-\frac{2i\pi}{9} + 1 \times \frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{9}}, \quad x_3 = e^{-\frac{2i\pi}{9} + 2 \times \frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{10i\pi}{9}}.$$

De façon similaire, on détermine les trois racines troisièmes de $X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$:

$$x'_0 = e^{\frac{2i\pi}{9}}, \quad x'_1 = e^{-\frac{10i\pi}{9}}, \quad x'_2 = e^{-\frac{4i\pi}{9}}.$$

Pour chaque valeur de $x_0, x_1, x_2, x'_0, x'_1$ et x'_2 , il reste à résoudre les équations

$$1 + \frac{1}{z} = x_0, \quad 1 + \frac{1}{z} = x_1, \dots, \quad 1 + \frac{1}{z} = x'_2.$$

On trouve ainsi les six solutions de (E5):

$$z = \frac{1}{e^{-\frac{2i\pi}{9}} - 1}, \quad z = \frac{1}{e^{\frac{4i\pi}{9}} - 1}, \quad z = \frac{1}{e^{\frac{10i\pi}{9}} - 1}, \quad z = \frac{1}{e^{\frac{2i\pi}{9}} - 1}, \quad z = \frac{1}{e^{-\frac{4i\pi}{9}} - 1}, \quad z = \frac{1}{e^{-\frac{10i\pi}{9}} - 1}.$$

¹Jean-Marie Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr

Exercice 7. Factoriser les polynômes suivants en exploitant les informations données:

- (1) $P(x) = 2x^3 - (5 + 6i)x^2 + 9ix + 1 - 3i$ (P possède une racine réelle).
- (2) $Q(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ (Q possède une racine évidente).
- (3) $R(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$ (poser $u = x + \frac{1}{x}$).

Réponse. (1) On sait d'après l'énoncé que $P(x)$ admet une racine réelle. Notons la x_0 . On a alors $2x_0^3 - (5 + 6i)x_0^2 + 9ix_0 + 1 - 3i = 0$. Comme x_0 est réel, on peut facilement identifier dans le membre de gauche les parties réelles et imaginaires:

$$\operatorname{Re}(2x_0^3 - (5 + 6i)x_0^2 + 9ix_0 + 1 - 3i) = 2x_0^3 - 5x_0^2 + 1 \text{ et } \operatorname{Im}(2x_0^3 - (5 + 6i)x_0^2 + 9ix_0 + 1 - 3i) = -6x_0^2 + 9x_0 - 3.$$

Ainsi, x_0 est l'une des solutions de

$$2x_0^3 - 5x_0^2 + 1 = 0 \text{ et } -6x_0^2 + 9x_0 - 3 = 0.$$

La résolution de $-6x_0^2 + 9x_0 - 3 = 0$ donne comme solutions $x_0 = 1$ ou $x_0 = \frac{1}{2}$. Le réel $x_0 = 1$ n'est pas solution de $P(x) = 0$, donc on ne le considère pas. Par contre $\frac{1}{2}$ est solution de $P(x) = 0$. Donc $\frac{1}{2}$ est racine (réelle) de $P(x)$. On va maintenant factoriser $P(x)$ par $(x - \frac{1}{2})$. On peut par exemple effectuer une division euclidienne. On obtient:

$$P(x) = (x - \frac{1}{2}) \left(2x^2 - (4 + 6i)x + (-2 + 6i) \right).$$

Il reste à factoriser le polynôme $2x^2 - (4 + 6i)x + (-2 + 6i)$. On calcule le déterminant $\Delta = (-(4 + 6i))^2 - 4 \times 2 \times (-2 + 6i) = -4$, et on obtient alors les deux solutions

$$x_1 = \frac{-(-(4 + 6i)) - i\sqrt{4}}{2 \times 2} = 1 + i \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-(4 + 6i)) + i\sqrt{4}}{2 \times 2} = 1 + 2i.$$

On conclut

$$P(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x - 1 - i)(x - 1 - 2i).$$

(Ne pas oublier le 2 en préfacteur!)