L1 MASS - **M11** (2007-08)

[1]

IX. Fonctions continues et limités.

Exercice 18. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) + f(x) = 0 \ . \tag{1}$$

Montrer que si f est continue en 0, alors f est la fonction nulle.

Réponse.

•. L'égalité (1) implique, pour $x = 0$, $f(0) + f(0) = 0$, donc

$$f(0) = 0 \ . \tag{2}$$

•. L'égalité(1) s'écrit aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(x/2)$, ce qui implique en réitérant cette égalité que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(x) = -f(x/2) = f(x/4) = \cdots = (-1)^n f(x/2^n) \ .$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n f(x/2^n) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n f(0) = 0$$

où on a utilisé d'après la continuité de f en 0 que $\lim_{n\to\infty} f(x/2^n) = \lim_{y\to 0} f(y) = f(0)$, puis on a utilisé l'égalité (2). $\square$

[1]Jean-Marie Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr