

X. Fonctions dérivables et développements limités.

Exercice 25. Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f est deux fois dérivable et f'' est continue en tout point de \mathbb{R} . Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans \mathbb{R} définie par:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0) - x}{x}.$$

- 1) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 (le prolongement sera encore noté g).
- 2) Montrer que g est dérivable en tout point de \mathbb{R} .
- 3) Montrer que g' est continue en tout point de \mathbb{R} .

Réponse.

- (1) On commence par écrire

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1.$$

On a donc, par définition de la dérivée de f en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1 = f'(0) - 1.$$

(inutile ici de distinguer limite à droite et limite à gauche) On prolonge donc par continuité en 0 la fonction g en posant

$$g(0) = f'(0) - 1.$$

- (2) **Exercice 27.** Calculer le développement limité à l'ordre 4 en $\frac{\pi}{2}$ puis en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction cosinus.

Réponse. On peut utiliser plusieurs méthodes, selon, par exemple, que l'on suppose connu ou pas le développement limité de sinus et cosinus en 0 à l'ordre 4.

- Si on connaît les développements en $u_0 = 0$ suivants:

$$\begin{aligned} \cos u &= 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + u^4 \epsilon(u) \\ \sin u &= u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + u^5 \epsilon(u), \end{aligned}$$

on écrit, pour déterminer le développement limité en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ de cosinus:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

[où on a utilisé $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$].

Comme $u_0 - \frac{\pi}{2} = 0$, on utilise le développement limité de sinus en 0 en remplaçant u par $x - \frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi le développement limité en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ à l'ordre 4 suivant:

$$\begin{aligned} \cos x &= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{6} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \epsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{6} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \epsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

On procède de façon identique pour calculer le d.l. de cosinus en $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{6} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{24} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 \epsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

¹Jean-Marie Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr

• Si on ne suppose pas connu les d.l. en 0 de sinus et cosinus, on effectue le calcul à l'aide de la formule de Taylor. On a $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$, $\cos''(\pi/2) = -\cos(\pi/2) = 0$, $\cos^{(3)}(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$, $\cos^{(4)}(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$. Donc, le d.l. en $x_0 = \pi/2$ à l'ordre 4 de cosinus est

$$\begin{aligned}\cos x &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + 1\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{6} + 0\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{24} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\epsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{6} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\epsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Le calcul du d.l. de cosinus à l'ordre 4 en $\pi/4$ à l'aide de la formule de Taylor est similaire.