UNIVERSITÉ
DE
TOULON ET DU VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

DEUG MIAS/MASS 2ème année. (2004-05)

M31: Algèbre bilinéaire

Equipe pédagogique:

Cours.	G. Bouchitté	bouchitte@univ-tln.fr
Travaux Dirigés.	J.-M. Barbaroux	barbarou@univ-tln.fr
	J.-M. Ghez	ghez@univ-tln.fr
	Y. Ropars	ropars@univ-tln.fr

Chaque exercice de ce fascicule est marqué d'un symbole:

- Le symbole $\heartsuit$ mentionne les exercices *fondamentaux* que chaque étudiant doit avoir préparé avant la correction qui sera effectuée dans la séance de TD.
- Le symbole $\clubsuit$ est utilisé pour les exercices *complémentaires*, à préparer par l'étudiant, et dont certains seront corrigés en TD.
- Le symbole $\spadesuit$ accompagne les exercices d'*entraînement* pour lesquels, en cas de difficulté à les résoudre, l'étudiant peut demander des indications auprès de son responsable de TD, ou de l'un des membres de l'équipe pédagogique.

1. Révisions: Espaces vectoriels; applications linéaires.

Exercice 1. ♡ Soient

$$a = (3, 2, 1, 4);\ b = (2, 2, 2, 6);\ c = (4, 2, 0, 2);\ d = (-1, 0, 1, 2));\ e = (0, 3, 2, 1)$$

et soient
E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a, b, c, d, e ($E = \mathrm{Vect}(\{a, b, c, d, e\})$).
F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a, b, c ($F = \mathrm{Vect}(\{a, b, c\})$).
G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par d, e ($G = \mathrm{Vect}(\{d, e\})$).
Quelles sont les dimensions de E, F, G, $F + G$, $F \cap G$?

Exercice 2. ♣ Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \{h \in E \mid h \text{ est paire } \}$ et $G = \{h \in E \mid h \text{ est impaire } \}$.
i) Soit $h \in E$. Montrer que $f(x) = h(x) + h(-x)$ est paire. De façon similaire, construire une fonction impaire à partir de h.
ii) Montrer, en utilisant i), que $E = F \oplus G$.

Exercice 3. ♡ Les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils en somme directe ?

$$F_1 = \{x_1 = -x_2\} \text{ et } G_1 = \{x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$$

d'une part, et

$$F_2 = \{x_1 = -x_2\} \text{ et } G_2 = \{x_1 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$

d'autre part.

Exercice 4. ♣ Montrer que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés par

$$a = (1, -2, 0, 3), \quad b = (3, -1, 1, 0) \text{ et } \ c = (-2, -1, -1, 3)$$

d'une part, et

$$d = (7, 1, 3, -6), \quad e = (-2, -1, -1, 3)$$

d'autre part, sont identiques. Indiquer une base de ce sous-espace et la compléter de manière à obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. ♠ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère la famille

$$\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1))$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exercice 6. ♡
i) Montrer que la famille $A = \{x \mapsto e^{\alpha x} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ est libre dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
ii) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ n'est pas dans $\mathrm{Vect}(A)$. (Etudier la décroissance à l'infini.)

Exercice 7. ♣ Montrer que les familles $A = \{x \mapsto |x - \alpha| : \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{x \mapsto (x - \alpha)_+ : \alpha \in \mathbb{R}\}$ sont libres dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. (Etudier par exemple la dérivabilité de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k |x - \alpha_k|$.)

Exercice 8. ♡ Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que

$$B \subset C, \quad A \cap B = A \cap C, \quad \text{et} \quad A + B = A + C\ .$$

Montrer que $B = C$.

Exercice 9. $\heartsuit$ Soient les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x\mathrm{e}^{2x}$$

Soit $E = \{\alpha f_1 + \beta f_2\} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

i) Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

ii) Démontrer que (f_1, f_2) est une base de E.

iii) Soit φ définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de E et donner la matrice A de φ dans la base (f_1, f_2).

iv) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

v) Application: Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f_3 : \ x \mapsto (3x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

Remarque: On peut aussi répondre à cette question en effectuant un calcul direct.

Exercice 10. $\heartsuit$ Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

i) Montrer que $(X, X-1, X^2+1, 2X^2-3X+1)$ n'est pas une famille libre.

ii) Montrer que $(X, X-1, X^2)$ est une famille libre.

iii) Montrer que $(1, X, X^2-1, (X^2-1)(X+1))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

iv) On définit les applications q et r de la façon suivante: Pour tout polynôme P, $q(P)$ est le quotient de la division euclidienne de P par X^2-1, et $r(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par X^2-1. Montrer que q et r sont des applications linéaires de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

v) Donner des bases de l'image et du noyau pour q et pour r.

Exercice 11. $\clubsuit$ Soit $E = \mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{K}$. Soit $A \in E$ tel que $\deg(A) = n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

i) Montrer que

$$F = \{PA \mid P \in E\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

ii) Soit $G = \mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de E de degré inférieur ou égal à n. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est la dimension de G? Montrer que $F \oplus G = E$.

iii) Soit

$$f : \begin{array}{l} E \to E \\ P \mapsto R = \text{ le reste de la division euclidienne de } P \text{ par } A \end{array}$$

Montrer que f est une application linéaire. Donner $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$. Montrer que f est un projecteur.

Exercice 12. $\heartsuit$ Soit l'endomorphisme $f : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = (e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice $\tilde{A}$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.

ii) Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les coefficients de la matrice $\tilde{A}^n$. En déduire l'expression de A^n.

iii) On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 13. ♠ Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

i) Trouver trois éléments non nuls u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} f(u_3) &= -u_3 \\ f(u_2) &= u_3 - u_2 \\ f(u_1) &= u_2 - u_1 \end{cases}$

ii) Démontrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

iii) Ecrire B sous la forme $B = B_1 + B_2$ avec $B_1 B_2 = B_2 B_1$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14. ♡ Pour chacune des matrices A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire u_i canoniquement associé à A_i dans les cas suivants:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 15. ♠ Pour tout élément (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on note

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & -c \\ b & a+2c & -b \\ -c & -b & a+c \end{pmatrix}$$

Soit $E = \{M(a, b, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. On pose $I = M(1, 0, 0)$, $J = M(0, 1, 0)$, $K = M(0, 0, 1)$.

i) Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; quelle est sa dimension?

ii) Démontrer que E est une algèbre commutative sur $\mathbb{R}$.

iii) Démontrer que E n'est pas intègre, c'est à dire qu'il existe deux matrices non nulles A et B de E telles que $AB = 0$.

Exercice 16. ♣ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Soient les vecteurs

$$u = (1, 0, 1); \ v = (2, 1, 2); \ w = (1, -1, 0)$$

Démontrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii) Quelle est la matrice de f dans la base (u, v, w)?

Exercice 17. ♡ E étant un espace vectoriel et f un endomorphisme de E, on dit que f est un projecteur si $f \circ f = f$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On définit les applications p et q par:

$$p : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ x = y + z & \mapsto & y \ . \end{array}$$

$$q : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ x = y + z & \mapsto & z \ . \end{array}$$

i) Montrer que p et q sont des applications linéaires. Donner $\operatorname{Im} p$, $\operatorname{Ker} p$, $\operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker} q$.

ii) Etablir les propriétés suivantes:

$$p \circ p = p, \quad q \circ q = q, \quad p \circ q = q \circ p = 0, \quad p + q = \mathrm{Id}_E$$

En particulier, ceci démontre que p et q sont des projecteurs. On dit que p est le projecteur sur F parallèlement à G et q est le projecteur sur Q parallèlement à F.

iii) Réciproquement, montrer que si p est un projecteur on a

$$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$$

iv) Si E est de dimension finie n, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}(E)$ de E dans laquelle la matrice $A = \mathrm{Mat}(p, \mathcal{B}(E))$ de p dans la base $\mathcal{B}(E)$ est une matrice diagonale de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{I_r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité d'ordre r.

Exercice 18. ♣ Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. (Rappel: u^n signifie ici $u \circ u \circ \ldots \circ u$, n fois).

i) Démontrer qu'il existe un élément x de $\mathbb{R}^n$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x))$ soit une famille libre.

ii) En déduire que $n \geq 3$.

iii) On suppose que $n = 3$; quelle est la matrice de u dans la base $(x, u(x), u^2(x))$? Déterminer $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$.

Exercice 19. ♠ Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On note $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$, où $f^k = f \circ f \circ \ldots \circ f$, k fois.

i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\begin{cases} N_k \subset N_{k+1} \\ I_{k+1} \subset I_k \end{cases}$

ii) Montrer que s'il existe k_0 tel que $I_{k_0} = I_{k_0+1}$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{k_0} = I_{k_0+p}$.

iii) Montrer qu'il existe toujours un tel entier k_0.

Exercice 20. ♠ Soient f et g deux endomorphismes de E, $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. On note par $g|_{f(E)}$ la restriction de g au sous-espace vectoriel $f(E)$.

i) Déterminer $\mathrm{Im}\left(g|_{f(E)}\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(g|_{f(E)}\right)$.

ii) Démontrer que

$$\dim \mathrm{Im} f - \dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} g)$$

Exercice 21. ♣ Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) Il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Im} f = E_1$ et $\mathrm{Ker} f = E_2$.

ii) $\dim(E_1) + \dim(E_2) = n$.

Exercice 22. ♡ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et E' un sous-espace vectoriel de E. Soient F un espace vectoriel et F' un sous-espace vectoriel de F. On considère une application linéaire f de E vers F. Montrer

i) $\dim(f(E')) = \dim E' - \dim(\mathrm{Ker} f \cap E')$.

ii) $\dim(f^{-1}(F')) = \dim(\mathrm{Im} f \cap F') + \dim(E) - \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 23. ♠

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -Id_E$, où Id_E est l'application identité de E. Soient x_1, x_2 $\ldots$, x_p des éléments de l'espace vectoriel E pour lesquels la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{p-1}))$ est libre.

i) Démontrer que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p))$ est libre.

ii) Démontrer par récurrence que si p est un entier tel que $2 \leq 2p \leq n+1$, il existe p éléments x_1, x_2 $\ldots$, x_p de E tels que $(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p))$ soit une famille libre.

iii) Que peut-on conclure sur la parité de n?

iv) On suppose $n = 4$; écrire la matrice de f dans une base de la forme $(x_1, x_2, f(x_1), f(x_2))$.

2. Formes linéaires (Espace dual, orthogonal, base duale)

Exercice 24. ♡ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On désigne par A et B des parties de E. Etablir successivement les propriétés suivantes

i) $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
ii) $\{O_E\}^{\perp} = E^*$; $E^{\perp} = \{O_{E^*}\}$.
iii) $(\mathrm{Vect}A)^{\perp} = A^{\perp} \quad (A \neq \emptyset)$.
iv) $(A^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}A \quad (A \neq \emptyset)$.
v) $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

Exercice 25. ♡ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

i) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
ii) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$.
iii) Supposons que E est de dimension finie. Démontrer que l'on a

$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$$

et aussi

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow E^* = F^{\perp} \oplus G^{\perp}$$

Exercice 26. ♠ Soit E (respectivement F) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n (respectivement de dimension m), muni de la base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ (respectivement muni de la base $\mathcal{C} = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$). Pour $(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$, on définit l'application linéaire u_{ij} de E dans F par

$$u_{ij}(e_k) = \delta_{jk}\, f_i$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $k=j$ et qui vaut 0 si $k \neq j$.

i) Montrer que $\mathcal{D} = \{u_{ij},\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ (espace vectoriel des applications linéaires de E dans F). En déduire

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_K(E,F)) = (\dim_{\mathbb{K}} E) \times (\dim_{\mathbb{K}} F)$$

ii) Montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et l'espace vectoriel des matrices $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

iii) Etudier les cas particuliers suivants

- $E = \mathbb{K}$.
- $F = \mathbb{K}$.

Exercice 27. ♡ Soit E l'espace vectoriel réel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ (continues à dérivées continues) de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$: $E = \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$. Parmi les applications de E dans $\mathbb{R}$ suivantes, quelles sont celles qui sont linéaires?

$f \mapsto f(1)$;	$f \mapsto f(1)+1$;	$f \mapsto f'(0)$;
$f \mapsto (f'(0))^2$;	$f \mapsto \|f(1)\|$;	$f \mapsto f'(0) + \|f(1)\|$;
$f \mapsto \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$;	$f \mapsto \int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x$;	$f \mapsto f(1) + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 28. ♡ On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{C}_3 = (e_1,e_2,e_3)$. Les coordonnées d'un vecteur x dans la base $\mathcal{C}_3$ sont notées x_1, x_2, x_3:

$$x = (x_1,x_2,x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

On considère les applications f_1, f_2 et f_3 de E dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) = x_1 + x_2$$
$$f_2(x) = x_1 - x_2$$
$$f_3(x) = x_1 + x_2 - x_3$$

i) Montrer que f_1, f_2 et f_3 sont des éléments de E^*.

ii) Quelles sont les coordonnées de f_1, f_2 et f_3 dans la base duale $\mathcal{C}_3^*$ de la base canonique de E?

iii) La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle une base de E^*?

iv) Si oui, on notera $(f_1, f_2, f_3) = \mathcal{B}^*$. De quelle base $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{B}^*$ est-elle la base duale? (on dit que $\mathcal{B}$ est la base préduale de $\mathcal{B}^*$, ou plus simplement la base duale de $\mathcal{B}^*$).

Exercice 29. ♡ On considère $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel réel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = (1, x, x^2)$.

Soient f_1, f_2, f_3 les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_1(P) = P(0), \quad f_2(P) = P(0) + P'(0), \quad f_3(P) = P''(0)$$

Répondre aux mêmes questions que dans l'exercice 28.

Exercice 30. ♣ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$). Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ deux bases de E et $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{C}^*$ les bases duales respectives de $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. On note

$$P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ et

$$Q = (q_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^* \to \mathcal{C}^*} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ vers $\mathcal{C}^*$.

Montrer que

$$Q = {}^tP^{-1}$$

(${}^tP^{-1}$ est la matrice transposée de P^{-1}. C'est aussi l'inverse de la matrice transposée de P.)

Exemples: (Pour résoudre les questions suivantes, on pourra utiliser le résultat précédent et la base canonique des espaces considérés)

a) Montrer que les vecteurs $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (3, 2, 3)$ et $v_3 = (-1, -1, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base et en déterminer la base duale.

b) Montrer que les formes linéaires

$$f_1(x, y, z) = x + 2y + z, \quad f_2(x, y, z) = 2x + 3y + 3z, \quad f_3(x) = 3x + 7y + z$$

forment un base du dual de $\mathbb{R}^3$, et trouver la base duale (ou préduale) de cette base.

c) Soient $E = \mathbb{R}_3[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les formes linéaires sur E définies par

$$\forall P \in E, \quad \varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = P''(0), \quad \varphi_4(P) = P''(1)$$

Vérifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base duale de E^* et en déterminer sa base duale.

Exercice 31. ♡ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi \in E^*$ non nulle.

i) Montrer que φ est surjective.

ii) On suppose désormais E de dimension finie n. Quelle est la dimension de $H = \mathrm{Ker}\varphi$. Un tel sous-espace H est appelé hyperplan de E et on dit que "$\varphi(x) = 0$" est une équation de H.

iii) Réciproquement, on se donne un sous-espace vectoriel H de E de dimension $(n-1)$. Démontrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\}$. Quel est l'ensemble des équations d'un tel sous-espace vectoriel.

Exercice 32. ♡ Former les équations du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 0, 1)$ et $v = (1, -1, 2, 0)$ ($F = \mathrm{Vect}(u, v)$).

Exercice 33. ♡ Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E dans les cas suivants

i) F est le plan vectoriel d'équation $2x + 3y - z = 0$.

ii) F est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, -1, 1)$.

Exercice 34. ♠ On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3), où $u_1 = (1,1,0,2)$, $u_2 = (1,0,2,1)$, et $u_3 = (1,2,-2,3)$.
i) Déterminer la dimension de F et en donner une base.
ii) Déterminer $F^{\perp}$, le sous-espace vectoriel orthogonal de F, et en donner une base.
iii) Donner un système d'équations de F.

Exercice 35. ♣ Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par $(1,1,1,1)$, $(-1,1,-2,2)$, $(-1,5,-4,8)$, $(-3,1,-5,3)$.
i) Quelle est la dimension de F?
ii) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $F' = F^{\perp}$ de E^*?
iii) Montrer que l'image de $V = (x,y,z,t) \in E$ par toute forme linéaire $f \in F'$ peut s'écrire

$$f(V) = 4ax + 4by - (3a+b)z - (a+3b)t$$

En déduire deux formes linéaires f_1 et f_2 constituant une base de F'. Trouver les composantes de f_1 et f_2 dans la base de E^*, duale de la base canonique de E.

Exercice 36. ♡ Pour $n \in N^*$, soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$, on définit la trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$, par

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \text{(somme des éléments diagonaux de } A\text{)}$$

i) Montrer que l'application

$$\mathrm{tr} : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ A \mapsto \mathrm{tr}(A) \end{array}$$

est une forme linéaire sur E. Vérifier que tr est non nulle et donner la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.
ii) Quelles sont les composantes de tr dans la base duale de la base canonique de E?
iii) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \quad \text{on a} \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

iv) Déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$. ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Exercice 37. ♠ *Polynômes d'interpolation de Lagrange*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Pour chaque i dans $\{0,1,\ldots,n\}$, notons

$$L_i(x) = \prod_{0\leq j\leq n,\ j\neq i} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

i) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[x]$ des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n? Montrer que $\mathcal{B} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E.
ii) Soit $P \in E$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$?
iii) Déterminer la base duale $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B}$.
iv) Soit $\varphi \in E^*$. Quelles sont les coordonées de φ dans la base $\mathcal{B}^*$?
Applications:
a) Soit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un élément P de E, et un seul, tel que

$$\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}, \quad P(x_i) = f(x_i)$$

b) Montrer qu'il existe un élément $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique tel que

$$\forall P \in E, \quad \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

3. Formes bilinéaires, formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques.

Exercice 38. ♡
i) Les formes suivantes sont-elles bilinéaires?

- $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ ((x,y);\,(x',y')) \mapsto xx' + yy' \end{array}$
- $g: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ ((x,y);\,(x',y')) \mapsto x^2x' + yy' \end{array}$

ii) Trouver la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.
iii) Soit $\mathcal{B} = ((1,0);\,(1,1))$ une autre base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de f par deux méthodes.
iv) Les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont-elles des bases orthonormales pour f?
v) Soit $F = \mathrm{Vect}\{(1,1)\}$. Déterminer

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall y \in F, f(x,y) = 0\}$$

vi) Trouver la forme quadratique q associée à f. Puis, à partir de q, retrouver f.

Exercice 39. ♡ Soient a, b deux nombres réels tels que $a \leq b$ et soit $E = \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\varphi: \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \varphi(f,g) = \int_a^b (f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique positive, non dégénérée sur E.

Exercice 40. ♡ Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes. On considère l'application

$$\varphi: \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (A,B) \mapsto \varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tA\,B) \end{array}$$

où "tr" désigne l'application trace définie dans l'exercice 36.
i) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique définie sur E.
ii) Quelle est la forme quadratique q associée à φ? Pour $A \in E$, exprimer $q(A)$ à l'aide des coefficients de A.
iii) On suppose ici $n = p = 2$. Ecrire la matrice de φ dans la base canonique de E.

Exercice 41. ♡ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ une forme bilinéaire sur E, f, g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ (espace des endomorphismes de E) et θ l'application

$$\theta: \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \theta(x,y) = \varphi(f(x), g(y)) \end{array}$$

i) Montrer que θ est une forme bilinéaire sur E
ii) On suppose dans cette question que $f = g$.

- Montrer que si φ est symétrique, alors θ l'est aussi.
- On suppose θ symétrique. Donner une condition suffisante sur f pour que φ soit symétrique.

Exercice 42. ♣ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
i) Soit φ une forme bilinéaire sur E. Montrer qu'il existe un couple (φ_s, φ_a) unique de formes bilinéaires sur E tel que φ_s est symétrique, φ_a est antisymétrique et $\varphi = \varphi_s + \varphi_a$ (on explicitera $\varphi_s(x,y)$ et $\varphi_a(x,y)$ à l'aide de $\varphi(x,y)$).
On dit que φ_s (respectivement φ_a) est la partie symétrique (respectivement antisymétrique) de φ.

ii) *Application.* Soient θ_1 et θ_2 deux formes linéaires sur E. Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \varphi(x,y) = \theta_1(x)\theta_2(y) \end{array}$$

est une forme bilinéaire sur E. Déterminer φ_s et φ_a.

Exercice 43. ♡ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f une forme bilinéaire symétrique sur E et soit q la forme quadratique associée à f. Etablir les identités suivantes:
i) $\forall (x,y) \in E^2,\ q(x+y) = q(x) + q(y) + 2f(x,y)$.
ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ q(x+y) - q(x-y) = 4f(x,y)$.
iii) *Identité du parallélogramme:* $\forall (x,y) \in E^2,\ q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$.
iv) *Identité de la médiane:* $q\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + q\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{q(x)+q(y)}{2}$.
v) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ q(x+y) + q(y+z) + q(x+z) - q(x+y+z) = q(x) + q(y) + q(z)$.

Exercice 44. ♣ On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$ et f la forme bilinéaire sur E définie par

$$f : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) = ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \mapsto & f(x,y) = 33x_1y_1 - 14(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2 \end{array}$$

i) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}_2$: $A = \mathrm{Mat}(f;\mathcal{C}_2)$.
ii) On considère les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^2$: $e'_1 = e_1 + 2e_2$, $e'_2 = 2e_1 + 5e_2$. Montrer que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
iii) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $A' = \mathrm{Mat}(f;\mathcal{B})$. Donner l'expression de $f(x,y)$ dans la base $\mathcal{B}$.
iv) Donner l'expression de la forme quadratique q associée à f dans les bases $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 45. ♡ On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ et f la forme bilinéaire sur E définie par

$$f : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 56x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ & & \quad +7(x_1y_3 + x_3y_1) - 18(x_2y_3 + x_3y_2) \end{array}$$

où $x = (x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^3 x_ie_i$ et $y = (y_1,y_2,y_3) = \sum_{i=1}^3 y_ie_i$.
i) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}_3$: $A = \mathrm{Mat}(f;\mathcal{C}_3)$
ii) On considère les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$: $e'_1 = e_1$, $e'_2 = 2e_1 + e_2$, $e'_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$. Montrer que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
iii) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$? Exprimer $f(x,y)$ dans la base $\mathcal{B}$.
iv) Donner l'expression de la forme quadratique q associée à f dans les bases $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 46. ♡ Soient $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel réel des fonctions polynomiales de degré au plus 2 et $\mathcal{C}_3 = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de cet espace, définie par $e_i(x) = x^i$ $(i = 0,1,2)$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x \end{array}$$

i) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
ii) Donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}_3$: $A = \mathrm{Mat}(\varphi;\mathcal{C}_3)$. Donner l'expression de $\varphi(P,Q)$ à l'aide des coordonnées de P et Q dans la base canonique $\mathcal{C}_3$. Quel est le rang de φ?
iii) Soit q la forme quadratique associée à φ. Donner l'expression de $\varphi(P)$ à l'aide des coordonnées de P dans la base $\mathcal{C}_3$.

Exercice 47. ♣ Reprendre l'exercice précédent en remplaçant φ par l'application θ définie par

$$\theta(P,Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 48. ♠ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme bilinéaire sur E. On dit que la forme bilinéaire f est réductible lorsqu'il existe deux formes linéaires φ_1 et φ_2 sur E, non nulles, telles que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y).$$

On suppose dans la suite que E est de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On se propose de démontrer le résultat suivant:

$$f \text{ est réductible} \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = 1$$

i) Supposons f réductible. Soit A_1 (respectivement A_2) la matrice de φ_1 (respectivement φ_2) dans la base $\mathcal{B}$:

$$A_1 = \mathrm{Mat}(\varphi_1;\ \mathcal{B}, (1_{\mathbb{K}}))\ ,\quad A_2 = \mathrm{Mat}(\varphi_2;\ \mathcal{B}, (1_{\mathbb{K}}))$$

Montrer que

$$f(x,y) = {}^tX\,{}^tA_1A_2Y,$$

où X (respectivement Y) est la matrice colonne de x (respectivement de y) dans la base $\mathcal{B}$. En déduire que

$$\operatorname{rg} f = 1.$$

ii) Réciproquement, soit f une forme bilinéaire sur E de rang 1. Donnez la forme de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire que f est réductible.

Exercice 49. ♡ Déterminer le rang et la signature des formes quadratiques suivantes (*On utilisera la méthode de Gauss pour la réduction en carrés*).
i) $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3$.
ii) $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x_1,x_2,x_3) = 13x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_3^2 - 12x_2x_3 - 6x_1x_3 - 4x_1x_2$.
iii) $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_3-x_1)^2$.
iv) $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.
v) $E = \mathbb{R}^4$ et $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_3x_4 + x_1x_4 + 3x_1x_2 - x_2x_4$.
vi) $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$.
vii) $E = \mathbb{R}^4$ et $q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\mu x_1x_2$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 50. ♡ Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ une forme quadratique sur E.
i) Donner la forme polaire associée à q.
ii) La forme quadratique q est-elle dégénérée?
iii) Soient $u = (1,0)$, $v = (1,1)$ et $w = (0,1)$. Donner $\{u\}^\perp$, $\{v\}^\perp$, $\ker q$, $E^\perp$ et $\{0_E\}^\perp$.

Exercice 51. ♣ Mêmes questions que pour l'exercice 50 avec
i) $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x) = x_1^2$; $u = ((1,0)$, $v = (1,1)$ et $w = (0,1)$.
ii) $E = \mathbb{C}^2$ et $q(x) = x_1^2$; $u = (1+i,i)$, $v = (i,1-i)$ et $w = (i,i)$.

Exercice 52. ♡ Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = x_1^2 - x_3^2$ une forme quadratique sur E. Soient $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (0,1,0)$.
i) $\{u,v,w\}$ est-elle une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$?
ii) Donner $\{u\}^\perp$, $\{v\}^\perp$, $\{w\}^\perp$, $\{u,v\}^\perp$, $\{v,w\}^\perp$, $\{u,w\}^\perp$, $E^\perp$, $\{0_E\}^\perp$.
iii) La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle q-orthogonale?

Exercice 53. ♠ Mêmes questions que pour l'exercice 52 avec $E = \mathbb{R}^3$ et

$$q(x) = x_1x_2 + x_3^2.$$

Exercice 54. ♡ Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et l'application q définie par

$$q: \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_0^1 [P'(X)]^2 \mathrm{d}X \end{array}$$

i) Montrer que q est une forme quadratique sur E.
ii) Donner sa forme polaire.
iii) La forme quadratique q est-elle dégénérée?

Exercice 55. ♠ Même questions que dans l'exercice 54 pour $E = \mathbb{R}_2[X]$ et

$$q: \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ P \mapsto [P'(0)]^2 \end{array}$$

Exercice 56. ♡ Soient $E = \mathbb{R}^3$ et φ la forme bilinéaire sur E définie par

$$\varphi: \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 \end{array}$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Soit q la forme quadratique associée à φ.
i) Est-ce que q est dégénérée?
ii) Rappeler l'expression générale d'une forme bilinéaire sur E et construire à l'aide de φ un isomorphisme de E sur E^*.
iii) Soit

$$H = \{x \in E \mid x_1 = x_3 \ \text{ et } \ x_2 = 0\}$$

Déterminer $H^\perp$. A-t-on $\dim(H) + \dim(H^\perp) = 3$? A-t-on $E = H + H^\perp$?

Exercice 57. ♡ *Suite de l'exercice 40 avec $n = p = 2$.*
Soit (E_{ij}) la base canonique de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère les matrices

$$M_{ij} = \frac{1}{2}\left(E_{ij} + E_{ji}\right), \text{ et } N = \frac{1}{2}\left(E_{12} - E_{21}\right)$$

Montrer que $(M_{11}, M_{1,2}, M_{2,2}, N)$ est une base φ-orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Réduction des endomorphismes.

Exercice 58. ♡ Un vecteur propre d'un endomorphisme peut-il être associé à deux valeurs propres distinctes?

Exercice 59. ♡ Etudier les éléments propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans chacun des cas suivants
i) u est une homothétie: $u = \lambda \,\mathrm{Id}_E$ ($\lambda \in \mathbb{K}$).
ii) u est un projecteur, avec $u \neq 0$ et $u \neq \mathrm{Id}_E$.
iii) u est une symétrie, avec $u \neq \mathrm{Id}_E$, $u \neq -\mathrm{Id}_E$.

Exercice 60. ♡ E étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$. Quel est le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ de l'endomorphisme u?

Exercice 61. ♡ Etudier les éléments propres d'un endomorphisme de rang 1.

Exercice 62. ♡ Cherchez les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices réelles suivantes et déterminer celles qui sont diagonalisables.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix} a \neq 0, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 63. ♠ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que A n'est pas diagonalisable. Trigonaliser A.

Exercice 64. ♠ On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ .$$

i) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés aux matrices A et B.
ii) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables?
iii) Mêmes questions si on considère A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Exercice 65. ♠ Pour quelles valeurs des paramètres réels a, b, c, d, e, f les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 66. ♡ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose

$$B = A + \alpha I_n.$$

i) Comparer les polynômes caractéristiques de A et B.
ii) Comparer les spectres de A et B.

iii) Montrer que A et B ont les mêmes sous-espaces propres. En déduire que A et B sont simultanément diagonalisables ou non.

Application: Soit

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

Etudier la diagonalisation de A (Il est demandé d'effectuer la diagonalisation sans calcul de polynôme caractéristique).

Exercice 67. ♠ Soit $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire qui à $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ définie par

$$\begin{cases} y_1 &= 4\,x_3 \ , \\ y_2 &= x_1 + 2\,x_2 + x_3 \ , \\ y_3 &= 2\,x_1 + 4\,x_2 - 2\,x_3 \ . \end{cases}$$

i) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{C}_3$.
ii) Calculer les valeurs propres de f. Vérifier que f est diagonalisable.
iii) Est-ce que f est un automorphisme?
iv) Calculer les vecteurs propres de f.
v) Soit $\mathcal{B}'$ la base constituée des vecteurs propres (on ordonnera les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en respectant l'ordre croissant des valeurs propres). Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{C}_3$ vers $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
vi) On considère l'endomorphisme g défini par $g = f^3 - 9\,f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ où on a noté $f^3 = f \circ f \circ f$. Calculer la matrice de g dans $\mathcal{B}'$ puis calculer la matrice de g dans $\mathcal{C}_3$.

Exercice 68. ♣ On considère deux suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de u_0 et v_0 et par

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1),$$

où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, de valeurs propres λ_1 et λ_2. Calculer, pour tout n, u_n et v_n en fonction de u_0, v_0, n et des éléments de A,

a) lorsque A est diagonalisable.

b) lorsque A n'est pas diagonalisable.

Exercice 69. ♠ Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = X^3 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
i) Vérifier que $f(P) \in \mathbb{R}_3(X)$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer $f \circ f$. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{Sp}(f)$, le spectre de f?
ii) Expliciter la matrice A associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$: $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.
iii) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Exercice 70. ♠ Pour les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes, calculer les valeurs propres et les vecteurs propres. Diagonaliser, quand c'est possible, sinon trigonaliser. Ecrire les matrices de passage qui permettent de passer de la matrice de départ à sa forme réduite.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 71. ♡ Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad (A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{C}_3)).$$

i) Calculer $P_A(\lambda)$, le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable?

ii) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u admet pour matrice

$$T = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$T = P^{-1}AP.$$

iii) Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 72. $\heartsuit$ i) Montrer que si λ est valeur propre de A, alors λ^n est valeur propre de A^n, $n \in \mathbb{N}$.
ii) Déterminer toutes les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
iii) Montrer que si A est une matrice inversible, A et A^{-1} ont mêmes vecteurs propres. Donner les valeurs propres de A^{-1} en fonction de celles de A.

Exercice 73. $\spadesuit$ On considère r_θ la rotation directe dans $\mathbb{R}^3$ d'axe (Oz) et d'angle $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Montrer que r_θ n'admet qu'un seul vecteur propre.

Exercice 74. $\heartsuit$ Soient x, y et z trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$. On veut résoudre le système différentiel suivant

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& 7x - 3y - 4z \\ y' &=& -4x + 6y + 4z \\ z' &=& 5x - 3y - 2x \end{array} \right.$$

i) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Calculer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$X' = AX$$

ii) Diagonaliser A et déterminer P telle que $P^{-1}AP$ soit égale à la matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

iii) Résoudre le système d'équations différentielles (1).

Exercice 75. $\spadesuit$ Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que
$$f(x,y,z,t) = (x+z, 2y, x+2z-t, x+2z)\ .$$
i) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.
ii) Calculer P, le polynôme caractéristique de A. Montrer que 1 est racine de P et déterminer sa multiplicité. Montrer que A admet une deuxième valeur propre λ_2 qu'on calculera.
iii) Déterminer les sous-espaces propres de f. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
iv) Calculer $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$. Donner une base de $\mathrm{Ker}((A-I)^3)$, et trouver $v \in \mathrm{Ker}((A-I)^3)$ tel que $v \notin \mathrm{Ker}((A-I)^2)$.
v) Soient $v_1 = (A-I)^2 v$, $v_2 = (A-I)v$ et $v_3 = v$. Donnez les coordonnées de v_1, v_2 et v_3 dans la base canonique. Exprimer $(A-I)v_1$, $(A-I)v_2$ et $(A-I)v_3$ en fonction de v_1, v_2 et v_3. En déduire l'expression de Av_1, Av_2 et Av_3 en fonction de v_1, v_2 et v_3.
vi) Soit v_4 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_2. Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Montrer que la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) est une matrice de Jordan.

5. Espaces Euclidiens.

Exercice 76. ♡ Soient E un espace euclidien et $(x,y) \in E^2$. Calculer

$$\left\| \|y\|^2 x - (x|y)y \right\|^2$$

et retrouver ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que l'étude du cas d'égalité dans cette inégalité.

Exercice 77. ♠ *Une autre preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$; On pose $A = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^n b_i^2$ et $C = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Montrer que $C^2 \leq AB$.

1ère démonstration: L'inégalité est évidente si $B = 0$. Dans le cas où $B \neq 0$, calculer

$$\sum_{j=1}^n (Ba_j - Cb_j)^2$$

2ème démonstration: Montrer que

$$AB - C^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

En déduire le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 78. ♡ Etudier le cas de l'égalité dans l'inégalité de Minkowski (inégalité du triangle).

Exercice 79. ♡ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\big((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n)\big) \in (\mathbb{R}_+^n)^3$. Montrer

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 c_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 c_k \right)$$

Exercice 80. ♣ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir

$$\sum_{p=1}^n p\sqrt{p} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

Exercice 81. ♠ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Etablir

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2$$

Exercice 82. ♠ Soient E un espace euclidien et $(d, \delta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ tel que $\delta \leq d$. On considère B_1 la boule fermée de centre 0 et de rayon d

$$B_1 = B'_E(0,d) = \{x \in E \ ; \ \|x\| \leq d\} \ ,$$

B_2 la boule fermée de centre 0 et de rayon $d + \delta$ et A une partie convexe de E telle que

$$A \subset B_2 \setminus B_1.$$

Etablir l'inégalité

$$\mathrm{diam}(A) := \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\| \leq 2\sqrt{3\delta d}$$

($\mathrm{diam}(A)$ est le diamètre de A).

Rappel: Une partie A d'un espace vectoriel réel est dite convexe si

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \ \lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

Exercice 83. ♠ Soient E un espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$

i) Vérifier

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 = n \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right) - \| \sum_{i=1}^n x_i \|^2$$

ii) On suppose ici que $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $(i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geq 2)$. Soit

$$B = B'_E(a,r) = \{x \in E \ ; \ \|x - a\| \leq r\}$$

une boule fermée dans E de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$, contenant $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Montrer que le rayon r de B satisfait la relation

$$\sqrt{\frac{2(n-1)}{n}} \leq r.$$

Exercice 84. ♡ Soient $\mathcal{C}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, et

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \text{ et } x_1 + x_3 = x_2 + x_4\}$$

Former les matrices, relativement à $\mathcal{C}_4$, de la projection orthogonale sur F et des symétries orthogonales par rapport à F et $F^\perp$.

Exercice 85. ♡ Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, on considère

$$v_1 = (1, 2, -1, 1), \quad v_2 = (0, 3, 1, -1), \quad F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2).$$

Déterminer une base orthogonale et un système d'équations de $F^\perp$.

Exercice 86. ♡ Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, on considère

$$v_1 = (2, 1, -1, 1), \quad v_2 = (3, 1, 1, 0), \quad F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2), \quad \text{et} \quad v = (2, 3, -1, -4).$$

Quelle est la projection orthogonale de V sur F? Quelle est la distance de V à F?

Exercice 87. ♣ Soit $\mathcal{C}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, et soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les matrices relativement à $\mathcal{C}_3$ de la symétrie orthogonale par rapport à F, dans les cas suivants.

i) $F = \mathrm{Vect}(\{e_1, e_2\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_3 = 0\}$.
ii) $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.
iii) $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ \sum_{i=1}^{3} a_i x_i = 0\}$ où $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ est donné.

Exercice 88. ♡ Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus 2. Les formes bilinéaires symétriques suivantes sont-elles définies? positives?

i) $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0)$.
ii) $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.
iii) $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x$
iv) $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)P(x)Q(x)\mathrm{d}x$

Exercice 89. ♡ On considère $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ et la forme bilinéaire symétrique φ définie sur E par

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \\
&= 4x_1y_1 + 5x_2y_2 + 9x_3y_3 + 4(x_1y_2 + x_2y_1) + 6(x_2y_3 + x_3y_2) + 4(x_1y_3 + x_3y_1)
\end{aligned}$$

i) Montrer que φ est un produit scalaire sur E
ii) A l'aide du procédé d'orthogonalisation de Schmidt, construire une base $\mathcal{B}$ orthogonale pour φ, puis en déduire une base $\mathcal{B}'$ orthonormale pour φ.
iii) Quelles sont les matrices de φ dans les bases $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exercice 90. ♣ Mêmes questions que dans l'exercice 89 avec $E = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{C}_3 = (e_0, e_1, e_2)$ (où $e_i(x) = x^i$, $i \in \{1, 2, 3\}$) et

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 91. ♡ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n muni du produit scalaire défini par

$$(A|B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$$

i) Vérifier que l'application $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
ii) Soit $A = (a_{ij}) \in E$. Exprimer $\|A\|$ à l'aide des a_{ij}.
iii) On considère les sous-espaces vectoriels suivants de E

$$F = S_n(\mathbb{R}) = \{A \in E;\ {}^tA = A\} \quad \text{et} \quad G = A_n(\mathbb{R}) = \{A \in E;\ {}^tA = -A\}.$$

Déterminer $F^\perp$ et $G^\perp$.

iv) Démontrer que E est somme directe orthogonale de F et G: $E = F \oplus G$ et F et G sont orthogonaux.

v) Soit $A \in E$. Quelles sont les projections orthogonales de A sur les sous-espaces vectoriels F et G? Calculer

$$\alpha = \inf\{\|A - M\|;\ M \in F\} \quad \text{(distance de } A \text{ à } F\text{)}$$

et

$$\beta = \inf\{\|A - M\|;\ M \in G\} \quad \text{(distance de } A \text{ à } G\text{)}$$

Exercice 92. ♠ On munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique avec $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. La base canonique $\mathcal{C}_n = (e_i)_{1\le i\le n}$ est donc orthonormale. Soit $a = (a_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ et u la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

i) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |u(x)| \le \|a\|\|x\|$$

et

$$\sup_{\|x\|=1} |u(x)| = \|a\|$$

ii) Exprimer $H = \ker(u)$ à l'aide de a. Que dire de $H^\perp$?

iii) Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $d = d(x, H) = \inf_{y\in H} \|x - y\|$, la distance de x à H. Exprimer d à l'aide de a et x. Quelle formule de l'enseignement secondaire a-t-on retrouvée?

Exercice 93. ♠ *Matrice de Householder*

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $H = V^\perp$ l'hyperplan orthogonal à V.

Soit p la projection orthogonale sur H et P sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; soit s la symétrie orthogonale par rapport à H (appelée réflexion) et S sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

i) Montrer que

$$P = I_n - \frac{1}{{}^tV\,V} V\,{}^tV.$$

ii) Montrer que

$$S = I_n - \frac{2}{{}^tV\,V} V\,{}^tV.$$

(S est appelée *matrice de Householder*)

Exercice 94. ♣ Soient E un espace euclidien, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E.

i) Rappeler les propriétés de p, projecteur de E.

ii) Etablir l'équivalence des assertions suivantes:

1. Im$p \perp$ ker$p$ (on dit alors que p est un projecteur orthogonal de E).
2. $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \le \|x\|$.

Exercice 95. ♠ Soient E un espace euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ un système de n vecteurs unitaires (i.e., pour tout i, $\|e_i\| = 1$), tel que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2\ .$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
Indication: Montrer d'abord que $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une famille orthonormale, puis considérer* $F = \mathrm{Vect}(\{e_1, \ldots, e_n\})$ *et la projection orthogonale sur* F.

Exercice 96. ♡ On considère $E = \mathbb{R}_3[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus 3, muni du produit scalaire

$$(P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

(c.f. 90 ci-dessus), F le sous-espace vectoriel de E: $F = \mathbb{R}_2[x]$ et $\mathcal{C}_3 = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

Calculer la distance dans E de e_3 à F: $d(e_3, F)$. En déduire

$$m = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \left(\int_0^1 [x^3 - ax^2 - bx - c]^2 \mathrm{d}x \right).$$

Exercice 97. ♠ Calculer

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 x^2 [\ln x - ax - b]^2 \mathrm{d}x \right).$$

Procéder comme dans l'exercice 96 en introduisant le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E = \mathrm{Vect}(\{e_0, e_1, f\})$*, sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* $C([0,1];\mathbb{R})$*, où pour tout* $x \in [0,1]$*, on a*

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \quad \text{et} \quad f(x) = \begin{cases} x \ln x, \ \text{si } x \in]0,1] \\ 0, \ \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 98. ♠ Soient E, F deux espace euclidiens et $f : E \to F$ une application telle que $f(0_E) = 0_F$ et

$$\left(\forall (x,y) \in E^2\right) \ (\|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E),$$

autrement dit, f est une application isométrique de E dans F: "f conserve les distances".

i) Utiliser les formules usuelles dans les espaces euclidiens pour montrer que f conserve le produit scalaire:

$$\left(\forall (x,y) \in E^2\right) \ (\ (f(x)|f(y))_F = (x|y)_E).$$

ii) Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire et injective.

iii) Que peut-on dire de plus si $E = F$?

iv) On ne suppose plus que $f(0) = 0$. Que peut-on dire à la place du résultat obtenu en ii)?

6. Matrices symétriques - Matrices orthogonales - Adjoint.

Exercice 99. ♡ Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, on considère le vecteur unitaire $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$). Soient $\Delta = \mathrm{Vect}(\{u\}) = \mathbb{R}u$ la droite (vectorielle) engendrée par u et $P = \Delta^\perp$ le plan (vectoriel) orthogonal à u. Former les matrices relativement à $\mathcal{C}_3$ (base canonique de $\mathbb{R}^3$) des projections orthogonales sur Δ et P et des symétries orthogonales par rapport à Δ et P.

Parmi les matrices obtenues, lesquelles sont orthogonales, symétriques? Pourquoi?

Exercice 100. ♡ Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, on considère le sous-espace vectoriel F d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Former les matrices, relativement à la base canonique $\mathcal{C}_4$, des projections orthogonales sur F et $F^\perp$ et des symétries orthogonales par rapport à F et $F^\perp$. Pour $x \in \mathbb{R}^4$, exprimer $d(x, F)$ (distance de x à F). Parmi les matrices obtenues, lesquelles sont orthogonales, symétriques? Pourquoi?

Exercice 101. ♠ On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique; soit $\mathcal{C}_n = (e_i)_{1 \le i \le n}$ sa base canonique et $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice orthogonale d'ordre n. On pose, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$v_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad \text{et} \quad u = (1, \ldots, 1) = \sum_{i=1}^n e_i.$$

i) Exprimer la somme $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}$ à l'aide des vecteurs v_j et du vecteur u.

ii) Etablir l'inégalité

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \right| \le n. \tag{2}$$

iii) Dans quel cas a-t-on égalité dans l'inégalité (2) précédente? Donner un exemple d'une matrice A orthogonale et vérifiant l'égalité $|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}| = n$.

Exercice 102. ♣ Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Etablir l'équivalence des assertions suivantes:

1. $A \in O_n(\mathbb{R})$
2. $\sum_{j=1}^n C_j\, {}^t\!C_j = I_n$

Exercice 103. ♠ *Etude de $O_2(\mathbb{R})$*

i) Etablir

$$O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta;\ \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\varphi;\ \varphi \in \mathbb{R}\}$$

où

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

ii) On pose $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R});\ \det A = 1\}$. Etablir $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta;\ \theta \in \mathbb{R}\}$. Interpréter géométriquement les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel.

iii) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$; montrer que $S_\varphi^2 = I_2$, $\det(S_\varphi) = -1$ et $S_\varphi = R_\varphi S_0$. Interpréter géométriquement S_φ

Indication: S_φ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ d'une symétrie orthogonale (une réflexion) par rapport à une droite de $\mathbb{R}^2$.

iv) Calculer $R_\theta R_{\theta'}$, $R_\theta S_\varphi$, $S_\varphi R_\theta$, $S_\varphi S_{\varphi'}$ pour θ, θ', φ, φ' dans $\mathbb{R}$.

Exercice 104. ♡ Soient $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ et

$$A = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1/2 & b/a & c/a \\ a/b & -1/2 & c/b \\ a/c & b/c & -1/2 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$A \in O_3(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 = c^2.$$

Exercice 105. ♠ Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & a \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & b \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c) pour que $A \in O_3(\mathbb{R})$?

Exercice 106. ♡ Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Trouver $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 107. ♠ Même question que dans l'exercice 106 avec

$$B = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 108. ♡ Réduire dans le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel les formes quadratiques

$$\begin{aligned} q_1(x) = q_1(x_1,x_2,x_3) &= 2{x_1}^2 + 2{x_2}^2 + {x_3}^2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \\ q_2(x) = q_2(x_1,x_2,x_3) &= 151{x_1}^2 - 119{x_2}^2 + 137{x_3}^2 - 192x_2x_3 + 48x_1x_3 + 144x_1x_2 \end{aligned}$$

Exercice 109. ♣ Soit $S_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On dit que A est positive (respectivement définie positive) si

$$(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \ \left({}^tXAX \geq 0\right),$$

$$\left(\text{respectivement}\,(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}) \ \left({}^tXAX > 0\right)\right).$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n positives (respectivement définies positives). Etablir à l'aide d'une diagonalisation les équivalences

1. $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$
2. $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

Exercice 110. ♣ Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = {}^tAA$.

i) Montrer: $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

ii) Etablir: $S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 111. ♠ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f_1, \ldots, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i,j\,,\ a_{ij} = \int_a^b f_i(t) f_j(t) \mathrm{d}t.$$

i) Montrer que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ (A est symétrique positive)

ii) Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (A est symétrique définie positive) si et seulement si $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 112. ♠ *Application de l'exercice 111: Matrices de Hilbert*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer: $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Indication. Remarquez: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k \mathrm{d}t$.

Exercice 113. ♠ On désigne par $T_{n,s}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre n.

i) Etablir la propriété:

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \exists (\Omega, T) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_{n,s}(\mathbb{R}),\ A = \Omega T.$$

Indication: Utiliser $\mathbb{R}^n$ euclidien et sa base canonique $\mathcal{C}_n$. Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^n$ définie par: A est la matrice de passage de $\mathcal{C}_n$ à $\mathcal{B}$. Appliquer alors le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette base $\mathcal{B}$ afin d'obtenir une base orthonormale $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^n$ usuel

ii) *Complément:* Si on suppose de plus que les éléments diagonaux de T sont dans $\mathbb{R}_+^*$, alors le couple (Ω, T) est unique.
Application: Soit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$, on a

$$|\det A| \leq \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(inégalité d'Hadamard)}$$

Dans quel cas a-t-on égalité dans l'inégalité précédente?

Exercice 114. ♡ Soient E un espace euclidien et $f, g : E \to E$ deux applications telles que

$$\left(\forall (x,y) \in E^2\right) \ \left(\ (x|f(y)) = (g(x)|y) \ \right).$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.

Exercice 115. ♠ Soient E un espace euclidien de dimension n, u un endomorphisme de E, $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $\mathcal{C} = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux bases orthonormales de E. On pose

$$\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (u(e_j)|f_i)^2.$$

i) Montrer que $\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est indépendant du choix des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Indication: Introduire $A = \mathrm{Mat}(u; \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et évaluer $\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ à l'aide de A. Effectuer ensuite des changements de bases.
ii) Exprimer $\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ à l'aide du spectre de la matrice symétrique ${}^tA\,A$.
iii) Exprimer les résultats de i) et ii) à l'aide de u^*u où u^* désigne l'adjoint de u.
iv) Examiner les cas particuliers: u symétrique et u orthogonal.

Exercice 116. ♣ Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E par

$$\forall (X,Y) \in E, \ (X|Y| = \mathrm{tr}({}^tXY).$$

i) Pour A fixée dans E, soit

$$\varphi_A : \begin{array}{c} E \to E \\ X \mapsto A\,{}^tXA \end{array}$$

Montrer que φ_A est un endomorphisme symétrique de E: $\varphi_A \in \mathcal{S}(E)$.
ii) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixées, soit

$$\psi_{A,B} : \begin{array}{c} E \to E \\ X \mapsto AX - XB \end{array}$$

Déterminer l'adjoint $\psi_{A,B}^*$ de $\psi_{A,B}$.

Exercice 117. ♡ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice dans la base canonique $\mathcal{C}_2$ de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{C}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Déterminer f^* et $\mathrm{Mat}(f^*; \mathcal{C}_2)$ quand $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Justifier tous les détails de la démonstration.
ii) Même question lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire suivant:

$$\varphi(x,y) = \langle x, y \rangle = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

7. Espaces hermitiens. Déterminants

Exercice 118. ♡ Soit $A = (a_{ij})_{i,j} = 1, \ldots, n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne.
Montrer que la somme des carrés de ses valeurs propres λ_i est égale à $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$.

Exercice 119. ♡ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$.
Diagonaliser A dans le groupe unitaire $U_3(\mathbb{C})$.

Exercice 120. ♡ Soit E un espace hermitien; un endomorphisme f de E est dit normal si $f \circ f^* = f^* \circ f$. Montrer que dans ce cas:
i) $\ker f = \ker f^*$.
ii) $\lambda_{\in}\mathbb{C}$ est valeur propre de f si et seulement si $\overline{\lambda}$ est valeur propre de f^*.
iii) Si $E_\lambda(f)$ est un sous-espace propre de f, $(E_\lambda(f))^\perp$ est stable par f et f^*.

Exercice 121. ♡ Soit E un espace hermitien; un endomorphisme f de E est dit unitaire si $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$. Soit f un tel endomorphisme; vérifier que f est un automorphisme et exprimer f^{-1}. On pose $g = \mathrm{Id}_E - f$.
i) Montrer que $\ker g = (\mathrm{Im}\, g)^\perp$.
ii) En déduire que $E = \mathrm{Im}\, g \oplus \ker g$.

Exercice 122. ♣ Soit $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & c+b & -2c \end{vmatrix}$.
i) Calculer $D(a,a,a)$ et $D(a,b,b)$.
ii) Cas général: Considérer le polynôme $D(x,b,c)$. Montrer que $-b$ et $-c$ en sont racines. Quel est son terme de plus haut degré? Conclusion?

Exercice 123. ♡ Factoriser le polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 124. ♡ Soient

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad (a,b,c \in \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Soit $f(z) = a + bz + cz^2$.
i) Montrer que

$$MU = \begin{pmatrix} f(1) & f(j) & f(j^2) \\ f(1) & jf(j) & j^2 f(j^2) \\ f(1) & j^2 f(j) & jf(j^2) \end{pmatrix}$$

ii) En déduire que

$$\det M = f(1)f(j)f(j^2)$$

puis l'identité $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$. En déduire que si $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3$ on a $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Exercice 125. ♠ Soit (A,B,C) un triangle de côtés $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et d'angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ issus respectivement de A, B et C. Sachant qu'il existe la relation suivante

$$a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}, \quad b = c\cos\hat{A} + a\cos\hat{C}, \quad c = a\cos\hat{B} + b\cos\hat{A},$$

trouver une relation liant les cosinus des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

Exercice 126. ♡ Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ \dots & & & & & \\ b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 127. ♣ Calculer

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Exercice 128. ♣ *Déterminant de Vandermonde.*
Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

en remarquant que c'est un polynôme en x_n de degré (n-1) dont x_1, x_2,... x_{n-1} sont les racines.

Exercice 129. ♡ Calculer le déterminant de la matrice tridiagonale suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 130. ♣ Calculer le déterminant de la matrice tridiagonale suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 131. ♣ i) Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & n \\ 1 & C_2^1 & 0 & \dots & \dots & 0 & n^2 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & 0 & \dots & 0 & n^3 \\ 1 & C_4^1 & C_4^2 & \dots & \dots & 0 & n^4 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & C_p^{p-1} & n^p \\ 1 & C_{p+1}^1 & C_{p+1}^2 & \dots & \dots & C_{p+1}^{p-1} & n^{p+1} \end{vmatrix}$$

Indication: calculer $\Delta_{n+1,p} - \Delta_{n,p}$

ii) En déduire les valeurs de $\sum_1^n k$, $\sum_1^n k^2$ et $\sum_1^n k^3$, où $n \in \mathbb{N}^*$.