1. Structures fondamentales: groupes, corps.

Exercice 1.1. Soit la loi de composition interne de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, que nous noterons $*$, définie par:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & x * y = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$

i) Montrer que le produit $*$ est commutatif et associatif sur $\mathbb{R}_+$.
ii) Montrer que ce produit admet un unique élément neutre $e \in \mathbb{R}_+$, et que e est l'unique élément qui admet un symétrique pour la loi $*$.
iii) Montrer que tout $x \in \mathbb{R}_+$ est régulier (i.e. que pour tout y et z dans $\mathbb{R}_+$, si $x * y = x * z$ alors $y = z$).

Exercice 1.2. Soit l'ensemble $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. On note $M(n)$ l'ensemble des bijections de A dans A.
i) Montrer que $M(n)$ est un groupe pour la loi $\circ$. Les éléments de ce groupe s'appellent *permutations.*
ii) Une bijection $s \in M(n)$ peut être notée indifféremment par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ s(1) & s(2) & \ldots & s(n) \end{pmatrix} \quad \text{ou par} \quad \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ s(i_1) & s(i_2) & \ldots & s(i_n) \end{pmatrix} .$$

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ représentent la même permutation.

Calculer le cardinal (nombre d'éléments) du groupe de permutations $M(n)$.

Exercice 1.3. On considère l'ensemble

$$X = \{\frac{1+2p}{1+2q};\ p, q \in \mathbb{Z}\} .$$

Montrer que $X \neq \mathbb{Q}$ et que $(X, .)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, .)$, où . désigne la multiplication usuelle dans $\mathbb{Q}$. Est-ce que $(X, +, .)$ est un corps?

Exercice 1.4. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On rappelle que $(m + n) \bmod(p)$ est l'addition de m et n modulo p, i.e., c'est le reste de la division euclidienne de $(m + n)$ par p. De même, $(n.m) \bmod(p)$ est le reste de la division euclidienne de $n\,m$ par p. On munit alors $\mathbb{N}$ de ces lois $+$ et . modulo p.
i) Montrer que l'ensemble $X = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{N}$ est un corps pour l'addition et la multiplication modulo $p = 5$.
ii) Montrer que l'ensemble $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{N}$ n'est pas un corps pour l'addition et la multiplication modulo $p = 6$.

Exercice 1.5. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni d'une addition, est un groupe noté $(\mathbb{C}, +)$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$?

$$(\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, +), (E = \{x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}, +),\ (F = \{x = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\}, +)$$

Exercice 1.6. Montrer que tout sous groupe H du groupe additif $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a \geq 0$.
Indication: Si $H = \{0\}$, *c'est évident avec* $a = 0$. *Si* $H \neq \{0\}$, *on écrira* $H = H' \cup (-H') \cup \{0\}$ *avec* $H' = \{x \in H\ ,\ x > 0\}$. *On montrera alors que* a *est le plus petit élément de* H'

Exercice 1.7 (Identité de Bezout)**.** Si $a, b \in \mathbb{Z}$ et si $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$, alors il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$.
Indication: On appliquera l'exercice 1.6 au sous-groupe $H = \{au + bv;\ u, v \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 1.8. Soit E un ensemble muni d'une loi notée multiplicativement. On rappelle que x^n pour $n \geq 0$ et n entier, est défini par récurrence par

$$x^n = x\,x^{n-1}, \quad \text{et} \quad x^0 = e \text{ (e est l'élément neutre).}$$

1) Montrer que si x admet un symétrique pour la loi multiplicative (i.e. un inverse), alors x^n est inversible pour $n \in \mathbb{N}$ et on a

$$(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n, \quad x^{-1} \text{ étant l'inverse de } x\ .$$

2) On introduit la notation $x^{-n} = (x^{-1})^n$. Montrer que si x est inversible, alors

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad \text{et} \quad (x^m)^n = x^{mn} \ ,$$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.9 (Homomorphismes)**.** Soient $(E, .)$ et $(E', .)$ deux ensembles munis chacun d'une loi (toutes deux notées multiplicativement, mais non nécessairement les mêmes). Soit f une application de E dans E'. On suppose que f est un homomorphisme, c'est à dire, que pour tout x et y dans E, on a

$$f(x\,y) = f(x)\,f(y) \ .$$

On suppose de plus que E et E' sont deux groupes.
1) Vérifier que $f(e) = e'$, où e et e' sont respectivement les éléments neutres de E et E'.
2) En déduire que pour tout $x \in E$, on a $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
3) Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(x^n) = \big(f(x)\big)^n \ .$$

4) Montrer que $f(E)$ est un sous-groupe de E' et que $f^{-1}(\{e'\})$ est un sous-groupe de E.

Exercice 1.10. Soit $(G, .)$ un groupe et soit $x \in G$. Montrer que le plus petit sous-groupe de G contenant x est le sous-groupe

$$H = \{x^n, \ n \in \mathbb{Z}\} \ .$$

(toujours avec la convention $x^0 = e$, et $x^{-n} = (x^{-1})^n$, pour $n \in \mathbb{N}$).

Montrer que H (appelé le sous-groupe de G engendré par x) est commutatif (même si G ne l'est pas).

Exercice 1.11 (Anneaux)**.** Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif.

Montrer la formule du binôme: $\forall x, y \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^p x^{n-p} y^p + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n \ .$$

(On pourra raisonner par récurrence).

Exercice 1.12 (Anneaux)**.** Soient $(A, +, .)$ et $(A', +, .)$ deux anneaux. On appelle homomorphisme de A dans A' toute application $f : A \to A'$ telle que $\forall x, y \in A$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y) \ .$$

Montrer alors que $f(A)$ est un sous-anneau de A' et vérifier les propriétés suivantes.

a) $f(0) = 0$.
b) $f(-x) = -f(x)$.
c) $H = \{x \in A, \ f(x) = 0\}$ est un sous-groupe de A.

Exercice 1.13 (Le corps des complexes)**.**
1) Vérifier avec soin que $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, \ +, \ . \ )$ est bien un anneau commutatif.

Rappelons que l'addition et la multiplication sont définies respectivement par

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \ ,$$
$$(a, b)\,(a', b') = (a\,a' - b\,b', \ a\,b' + a'b \ ) \ .$$

2) On convient d'identifier tout réel $a \in \mathbb{R}$ avec le nombre complexe $(a, 0)$.

On pose d'autre part $i = (0, 1)$.

Montrer que $i^2 = (-1, 0) = -1$ (la dernière égalité utilisant l'identification mentionnée ci-dessus). Montrer que $\forall z = (a, b) \in \mathbb{C}$, on a $z = a + ib$.

2. Espaces vectoriels.

Exercices fondamentaux

Dans tous les exercices de cette fiche, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On fait les rappels suivants:
Un **espace vectoriel** sur K ou K-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux lois :

1. une loi de composition interne notée "$+$", c'est à dire une application qui à tout couple d'éléments (x, y), $x \in E$ et $y \in E$, fait correspondre un élément de E noté $x + y$, et telle que :
   a. associativité :
   $$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E, \quad (x + y) + z = x + (y + z)\ ;$$
   b. élément neutre : E possède un élément neutre (pour la loi de composition interne $+$) qui est unique et noté 0_E, ce qui signifie que
   $$\forall x \in E, \quad x + 0_E = 0_E + x = x\ ;$$
   c. tout élément x de E possède un opposé dans E, c'est à dire un élément x' de E tel que
   $$x + x' = x' + x = 0_E.$$
   Cet élément opposé est unique et noté $(-x)$;
   d. commutativité :
   $$\forall x \in E,\ \forall y \in E, \quad x + y = y + x.$$
2. une loi de composition externe notée "$*$", c'est à dire une application qui à tout couple d'éléments (λ, x), $\lambda \in K$ et $x \in E$, fait correspondre un élément de E noté $\lambda * x$, et telle que :
$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E, &\qquad \lambda * (x + y) = \lambda * x + \lambda * y\ ;\\
\forall \lambda \in K,\ \forall \mu \in K,\ \forall x \in E, &\qquad (\lambda + \mu) * x = \lambda * x + \mu * x\ ;\\
\forall \lambda \in K,\ \forall \mu \in K,\ \forall x \in E, &\qquad (\lambda\mu) * x = \lambda * (\mu * x)\ ;\\
\forall x \in E, &\qquad 1 * x = x.
\end{aligned}$$

On rappelle qu'un sous-ensemble S d'un K-e.v. $(E, +, *)$ est un **sous espace vectoriel** (s.e.v.) de E si et seulement si:

(1) $0 \in S$,
(2) $\forall u \in S,\ \forall v \in S,\ u + v \in S$.
(3) $\forall \lambda \in K,\ \forall u \in S,\ \lambda * u \in S$.

Exercice 2.1. Soit E un K-espace vectoriel. Montrer les propriétés suivantes
$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E, &\qquad \lambda * (x + (-y)) = \lambda * x + (-(\lambda * y))\ ;\\
\forall \lambda \in K, &\qquad \lambda * 0_E = 0_E\ ;\\
\forall x \in E, &\qquad \lambda * (-x) = (-(\lambda * x))\ ;\\
\forall \lambda \in K,\ \forall \mu \in K,\ \forall x \in E, &\qquad (\lambda - \mu) * x = \lambda * x + (-(\mu * x))\ ;\\
\forall x \in E, &\qquad 0 * x = 0_E\ ;\\
\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E, &\qquad -\lambda * x = (-(\lambda * x))(\Rightarrow -1 * x = (-x))\ ;\\
\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E, &\qquad -\lambda * (-x) = \lambda * x.
\end{aligned}$$

Exercice 2.2. On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. Les sous-ensembles suivants sont ils des s.e.v.?

(1) $\{(x, y) : y = 4x\}$,
(2) $\{(x, y) : y = 4x + 5\}$,
(3) $\{(x, y) : y = 4x\} \cup \{(x, y) : x = 0\}$,
(4) $\{(x, y) : y = 4x\} + \{(x, y) : x = 0\}$,

(5) $\{(x,y):\ |x|<1\}$,
(6) $\{(x,y):\ y=x^2\}$,
(7) $\{(x,y):\ x\geq y\}$,
(8) $\{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$,
(9) $\{(x,y):\ x>y\}$.

Exercice 2.3. On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. Les sous-ensembles suivants sont ils des s.e.v.?

(1) $\emptyset$,
(2) $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$,
(3) $\{(x,y): y=ax+b\}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$,
(4) $\{(x,y): y=ax\}$, $a\in\mathbb{R}$,
(5) $\mathbb{R}^2$,
(6) $\{(1,0);\ (4,5);\ (6,7);\ (0,0)\}$,
(7) $\{(x,y):\ \exists\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $(x,y)=\lambda(1,1)\}$.

Exercice 2.4. On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$. Les sous-ensembles suivants sont ils des s.e.v.?

(1) $\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}$,
(2) $\{(x,y,z):\ z=0\}$,
(3) $\{(x,y,z): ax+by+cz=0\}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$,
(4) $\{(x,y,z):\ ax+by+cz+d=0\}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $d\neq 0$,
(5) $\{(x,y,z):\ \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x,y,z)=\lambda(4,5,6)+\mu(1,2,3)\}$.

Exercice 2.5. Soit E l'espace vectoriel réel des suites de $\mathbb{R}$ muni des lois suivantes:

$$(u_n)_n+(v_n)_n:=(u_n+v_n)_n,$$

$$\lambda(u_n)_n:=(\lambda u_n)_n.$$

(1) Soient les 2 suites suivantes:

$$u_n=4n+2,$$

$$v_n=(-1)^n.$$

Calculer les 3 premiers termes de la suite $(u_n)_n+(v_n)_n$.
Calculer le $n^{\text{ème}}$ terme de cette suite.
Calculer les 3 premiers termes de la suite $2(u_n)_n-(v_n)_n$.

(2) Soit la suite $o_n=0$. Soit la suite $w_n=2^n$.
Calculer le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite $(o_n)_n+(w_n)_n$.
Soit $(x_n)_n$ une suite quelconque.
Calculer le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite $(o_n)_n+(x_n)_n$.
Qu'en déduisez vous?

(3) Soit la suite $t_n=b+n$. Soit $\bar{t}_n=-b-n$.
Que pensez vous de la suite $(t_n)_n+(\bar{t}_n)_n$?
Soit $(x_n)_n$ une suite quelconque. Montrer que $(-x_n)_n$ est l'opposé de $(x_n)_n$ dans E.

Exercice 2.6. Soit E l'espace vectoriel réel des suites de $\mathbb{R}$.

(1) Soit $S=\{(u_n)_n\in E:\ u_n=0$ si n est pair$\}$. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.
(2) Soit $S'=\{(u_n)_n\in E:\ u_n\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}\}$. Est-ce un s.e.v. de E?
(3) Soit $T=\{(u_n)_n\in E:\ \forall n\geq 1, u_n+u_{n-1}=0\}$. Est-ce un s.e.v. de E?
(4) Soit $W=\{(u_n)_n\in E:\ u_n=a^n,\ a\in\mathbb{R}\}$. Est-ce un s.e.v. de E?

Exercice 2.7. Soient E un K-espace vectoriel, $\lambda\in K$ et $x\in E$. Montrer que

$$\lambda * x=0_E \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ou } x=0_E.$$

Exercice 2.8. Montrer que $F=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3, x_1+2x_2=0, x_3-x_1=0\}$ est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de $\mathbb{R}^3$ muni du corps $K=\mathbb{R}$.

Exercice 2.9. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
i) Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ est un s.e.v de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
ii) Les sous-ensembles suivants sont-ils des s.e.v de $\mathbb{R}_n[X]$?

a) $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(3) = 0\}$
b) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(3)\}$
c) $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(3) > P(0)\}$
d) $F_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 x \neq y \Rightarrow P(x) \neq P(y)\}$
e) $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(-x)\}$

Exercice 2.10. Soit E l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les sous-ensembles suivants sont-ils des s.e.v. de E? Justifier votre réponse.

$F_1 = \{f \in E : f \text{ continue}\}$ R*ep* : *oui*
$F_2 = \{f \in E : f \text{ paire}\}$ R*ep* : *oui*
$F_3 = \{f \in E : f \text{ croissante}\}$ R*ep* : *non*
$F_4 = \{f \in E : f = f_+ - f_-, \text{ avec } f_+ \text{ et } f_- \text{ croissantes}\}$
$F_5 = \{f \in E : f \text{ polynôme de degré n}\}$
$F_6 = \{f \in E : f \text{ polynôme de degré} \leq n\}$
$F_7 = \{f \in E : f \text{ ne prend qu'un nombre fini de valeurs}\}$

Exercice 2.11. Les s.e.v. suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils en somme directe ?

$$\{x_1 = -x_2\} \text{ et } \{x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$$
$$\{x_1 = -x_2\} \text{ et } \{x_1 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$

Exercices d'entrainement.

Exercice 2.12 (facile)**.** Montrer que $F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 = -x_2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni du corps $K = \mathbb{R}$.

Exercice 2.13 (facile)**.** On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$.

(1) Montrer que $\{(x,y) : y = 4x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
(2) L'ensemble $\{(x,y) : y = 4x + 5\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
(3) L'ensemble $\{(x,y) : y = 4x\} \cup \{(x,y) : x = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
(4) L'ensemble $\{(x,y) : y = 4x\} + \{(x,y) : x = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2.14 (facile)**.** Soient dans $\mathbb{R}^3$ les sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y,z) : x + y - z \geq 0\},\\
E_2 &= \{(x,y,z) : xy + yz = 0\},\\
E_3 &= \{(x,y,z) : x - 3y + 4z = 1\},\\
E_4 &= \{(x,y,z) : x^2 + y - z = 0\},\\
E_5 &= \{(x,y,z) : x - 3y + 4z = 0\},\\
E_6 &= \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}.
\end{aligned}$$

Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2.15 (moyen)**.** Soient E un e.v. et L, M, N trois s.e.v de E. Démontrer que

$$(L \cap M) + (L \cap N) \subset L \cap (M + N)$$

mais qu'on n'a pas forcément

$$(L \cap M) + (L \cap N) = L \cap (M + N).$$

Démontrer aussi que

$$M \subset L \Rightarrow (L \cap M) + (L \cap N) = L \cap (M + N)$$

mais qu'on n'a pas forcément

$$L + (M \cap N) = (L + M) \cap (L + N)$$

Remarque: pour les contre-exemples, on peut se placer dans $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2.16 (difficile)**.** Soit E un espace vectoriel.
i) Soient F et G deux s.e.v. de E. On suppose qu'il existe $(u, v) \in F \times G$ tel que $u \in F \setminus G$ et $v \in G \setminus F$. Construire un vecteur w de E qui n'appartienne ni à F ni à G.
ii) Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E tels que $E = F_1 \cup F_2$. Montrer alors que $E = F_1$ ou $E = F_2$.

Exercice 2.17 (difficile)**.** Soit E un e.v. Les propriétés suivantes sont elles vraies ou fausses ? Pourquoi ?
i) Si F et G sont deux s.e.v. de E, alors

$$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \;\Leftrightarrow\; F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

(on utilisera l'exercice 2.16).
ii) Soit F un s.e.v. de E tel que $F \neq E$ et soit $F^c = \{x \in E \mid x \notin F\}$ le complémentaire de F. Alors $\mathrm{vect}(F^c) = E$.

Exercice 2.18 (facile)**.** Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\},\; B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_3 = x_1 + x_2\}$$

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\} \text{ et } D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0,\; x_2 = x_3\}.$$

(1) Vérifier que A, B, C et D sont des s.e.v. de E.
(2) A et B sont-ils des s.e.v. supplémentaires?
(3) C et D sont-ils des s.e.v. supplémentaires?

Exercice 2.19 (facile)**.** Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \{f \in E \mid f \text{ est paire }\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ est impaire }\}$.
i) Soit $f \in E$. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ est paire. De façon similaire, construire une fonction impaire à partir de f.
ii) Quel est l'élément neutre de E? Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 2.20 (moyen)**.** Soient E un e.v. et F, G, H trois s.e.v. de E tels que $E = F \oplus G$ et $F \subset H$. Montrer que $H = F \oplus (G \cap H)$.

Exercices fondamentaux

Exercice 3.1. i) Soient E_1 et E_2 deux s.e.v d'un K-espace vectoriel E. Montrer que $E_1 \cap E_2$ est un espace vectoriel.
ii) On considère $x_1, x_2, \dots, x_n$, n vecteurs de l'espace vectoriel E. On appelle $\mathrm{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \dots, x_n$, c'est-à-dire que $x \in \mathrm{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots \lambda_n$, dans K tels que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$. Montrer que $\mathrm{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un s.e.v de E.
iii) Montrer que si un s.e.v. F de E contient les n vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ alors $\mathrm{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est inclus dans F.
iv) En déduire que $\mathrm{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est le plus petit espace vectoriel contenant $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Exercice 3.2. Soit E un K-e.v. de dimension n.
(1) Soit $\{e_1, ..., e_p\}$ une famille libre de vecteurs de E. Quelle relation existe-t'il entre p et n?
(2) Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille génératrice de vecteurs de E. Quelle relation existe-t'il entre p et n?

Exercice 3.3. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:
$$u = (1, -2, 0, 3), \quad v = (-1, 2, 1, -1) \quad \text{et} \quad w = (1, 3, -2, 0).$$
(1) Calculer les combinaisons linéaires suivantes :
$$2u + v + w \quad ; \quad 2(u + v) + w \quad ; \quad u - v + 3w.$$
(2) Déterminer $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, de telle sorte que le vecteur $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$ ait ses deux dernières composantes nulles.

Exercice 3.4. Soient les familles de vecteurs :
(1) $\{(7, 12),\ (18, -13),\ (\frac{17}{3}, \frac{8}{3})\}$;
(2) $\{(-1, 0, 2),\ (1, 3, 1),\ (0, 1, -1)\}$;
(3) $\{(15, -27, -6, 12),\ (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)\}$;
(4) $\{(-1, 2, 1, 4),\ (0, 3, -1, 2),\ (-2, 1, 3, 6)\}$.
Ces familles de vecteurs sont-elles libres ou liées ?

Exercice 3.5. Soient
$$a = (2, 3, -1),\ b = (1, -1, -2),\ c = (3, 7, 0),\ d = (5, 0, -7).$$
(1) Démontrer que les s.e.v. engendrés par a et b d'une part, c et d d'autre part, sont identiques et déterminer leur dimension.
(2) Compléter $\{a, b\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.
(3) Compléter $\{c, d\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.6. Soient $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, 1, 1, 3)$, $e_3 = (2, 1, 1, 1)$, $e_4 = (-1, 0, -1, 2)$, $e_5 = (2, 3, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et $U = \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3)$, $V = \mathrm{vect}(e_4, e_5)$.
Déterminer une base et la dimension de $U, V, U + V, U \cap V$.

Exercice 3.7. Soient $e_1 = (1, 0, 2, 2)$, $e_2 = (-1, 1, 3, -2)$, $e_3 = (2, -1, 5, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
i) Déterminer le rang de (e_1, e_2, e_3)
ii) Déterminer une base de $V = \mathrm{vect}(\{e_1, e_2, e_3\})$ que l'on complètera en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercices d'entrainement.

Exercice 3.8 (facile)**.** Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
(1) $A = (1, 2, -1), \quad B = (1, 0, 1), \quad C = (-1, 2, -3)$;

(2) $A = (-1, 2, 5)$, $\quad B = (2, 3, 4)$, $\quad C = (7, 0, -7)$;
(3) $A = (1, 3, -2)$, $\quad B = (3, 2, -6)$, $\quad C = (\frac{3}{2}, -\frac{11}{3}, -3)$.

Montrer que les vecteurs A, B et C sont linéairement dépendants et écrire la relation liant ces trois vecteurs.

Exercice 3.9 (facile)**.** Soient $u = (2, 1)$, $v = (-1, 2)$, $w = (1, 3)$. Montrer que $\mathrm{vect}(\{u, v, w\}) = \mathbb{R}^2$. Exprimer tout vecteur $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire de u, v et w. Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 3.10 (facile)**.** Déterminer une base et la dimension des s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendrés par la famille $\{X_i\}$:

(1) $X_1 = (2, 1, 3, 1)$, $X_2 = (1, 2, 0, 1)$, $X_3 = (-1, 1, -3, 0)$.
(2) $X_1 = (2, 1, 3, -1)$, $X_2 = (-1, 1, -3, 1)$, $X_3 = (4, 5, 3, -1)$, $X_4 = (1, 5, -3, 1)$.
(3) $X_1 = (0, 1, -2, 1)$, $X_2 = (4, 1, 3, 0)$, $X_3 = (-2, 1, -1, 1)$, $X_4 = (0, 3, 1, 2)$.

Exercice 3.11 (facile)**.** Soient $e_1 = (0, 1, 0, i)$, $e_2 = (0, 1+i, 0, -1+i)$, $e_3 = (0, 1, 1, 1)$, $e_4 = (0, 2, 1, 1+i)$ et $e_5 = (0, 1-i, -i, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{C}^4$ (considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel). Déterminer le rang de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4), et trouver une base du s.e.v. qu'ils engendrent.

Exercice 3.12 (facile)**.** Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 3, -1, 0)$ et $e_4 = (1, 2, 1, 4)$ de $\mathbb{R}^4$ sont linéairement indépendants. Calculer les coordonnées de $x = (7, 14, -1, -2)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

Exercice 3.13 (facile)**.** Les familles suivantes sont-elles libres dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$?

$$\begin{aligned} A = &\ \{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x\}; \\ B = &\ \{1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos 2x, \cos^2 2x\}; \\ C = &\ \{1,\ \sin x,\ \sin 2x,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \sin 3x,\ \cos 3x\}. \end{aligned}$$

Exercice 3.14. α et β étant deux nombres complexes ($\beta \neq 0$), on considère l'ensemble S des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définies par leurs premiers termes u_0, u_1 et la relation de récurrence :

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$$

pour tout $n \geq 2$.

(1) Montrer que S est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
(2) Y-a-t-il dans S des suites géométriques?
(3) En distinguant les deux cas $\alpha^2 + 4\beta \neq 0$ et $\alpha^2 + 4\beta = 0$, déterminer complétement les éléments de S.
(4) Exemples numériques:
   (a) $\alpha = \beta = 1$, $u_0 = u_1 = 1$. (Fibonacci);
   (b) $\alpha = 2k\cos\phi$, $\beta = -k^2$, $u_0 = 1$, $u_1 = k\cos\phi$ (k, ϕ réels);
   (c) $\alpha = 2t$, $\beta = 1$, $u_0 = u_1 = 1$.

Exercice 3.15 (moyen)**.** Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E de dimension finie. Montrer que $F+G$ est directe si et seulement si $\dim F + \dim G = \dim(F+G)$.

(On pourra considérer une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $F \cap G$ qu'on complète par $(f_1, \cdots, f_m)$ en une base de F et par $(g_1, \cdots, g_k)$ en une base de G.)

Exercice 3.16 (moyen)**.** Soient E un K-espace vectoriel et A une partie non vide de E.
i) *"Lemme d'échange"*. Soient a, $b \in E$ tels que $a \in \mathrm{vect}(A \cup \{b\})$ et $a \notin \mathrm{vect}\, A$. Montrer que $b \in \mathrm{vect}(A \cup \{a\})$.
ii) On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). On remarque que le vecteur $y := (1, \pi, \sqrt{2})$ appartient à $\mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3)$. Démontrer que $y \notin \mathrm{vect}(e_1, e_2)$ et en déduire que $e_3 \in \mathrm{vect}(e_1, e_2, y)$.

4. Applications linéaires.

Exercices fondamentaux

Exercice 4.1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (\lambda x + y, y + \lambda z), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est une application linéaire quel que soit le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f.

Exercice 4.2. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

$$(1) \qquad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z, z-1) \ ;$$

$$(2) \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y) \mapsto (x,y,a), \ a \in \mathbb{R} \ ;$$

Dans le cas (2), discuter suivant les valeurs du paramètre réel a.

Exercice 4.3. Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $\varphi : E \to F$ une application linéaire et un sous-ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ de vecteurs de E. Montrer que

$$\varphi(\mathrm{vect}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \mathrm{vect}(\{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}).$$

Exercice 4.4. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par

$$f(1,0,0,0) = 0, \ f(0,1,0,0) = -1, \ f(0,0,1,0) = 1, \ f(0,0,0,1) = -1.$$

Calculer $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^4$, et déterminer $\mathrm{Ker}\, f$. L'application f est-elle injective?

Exercice 4.5. Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire.

(1) Soit E' un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\varphi(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
(2) Montrer que le sous-ensemble $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, \ \varphi(x) = 0_F\}$ de E, appelé noyau de l'application φ, est un sous-espace vectoriel de E.

Applications linéaires sur les espaces des fonctions et des polynômes:

Exercice 4.6. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Quelles sont, parmi les situations suivantes, celles où $\varphi : E \to F$ est une application linéaire :

(1) soient G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f : E \to G$ et $g : G \to F$ deux applications linéaires et $\varphi = g \circ f$;
(2) soient $f : F \to E$ une application linéaire bijective et $\varphi = f^{-1}$;
(3) soient $E = F$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$,
   (a) $g \in E$ fixé et
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in E, \quad \varphi(f)(x) = g \circ f(x) \ ;$$
   (b)
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in E, \quad \varphi(f)(x) = f'(x) \ ;$$
   (c)
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in E, \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Exercices d'entrainement.

Exercice 4.7 (facile)**.** Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

$$(3) \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) = (2x - y, y, x) \ ;$$

$$(4) \qquad h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto h(x,y) = (ax + y + a, x - ay - a), \ a \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas (4), discuter suivant les valeurs du paramètre réel a.

Exercice 4.8 (facile)**.** Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par

$$f(1,1,0,0) = 0,\ f(0,1,1,0) = -1,\ f(0,0,1,1) = 1,\ f(1,0,0,2) = -1.$$

Calculer $f(x),\ x \in \mathbb{R}^4$, et déterminer Ker f. L'application f est-elle injective?

Exercice 4.9 (facile)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3,\ f(e_2) = -e_1+e_2,\ f(e_3) = -e_1-e_2+e_3$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(x),\ x = (x_1, x_2, x_3)$. Montrer que f est inversible et calculer $f^{-1}(e_j),\ j = 1, 2, 3$.

Exercice 4.10 (facile)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 - x_3, -2x_1 - x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_3)$$

Montrer qu'elle est linéaire, et calculer une base de $\mathrm{Im}(f),\ \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 4.11 (facile)**.** E étant un espace vectoriel et p un endomorphisme de E, on dit que p est un projecteur si $p \circ p = p$.

Pour F et G deux s.e.v de E tels que $E = F \oplus G$, on définit l'application f par:

$$f : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = y + z & \mapsto & y\ . \end{array}$$

i) Montrer que f est une application linéaire. Donner son image et son noyau. Vérifier que f est un projecteur. (On dit que f est le projecteur sur F parallèlement à G.)
ii) Réciproquement, montrer que si p est un projecteur on a

$$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)\ .$$

Exercice 4.12 (moyen)**.** Soit $f : E \to E$ une application linéaire, F, G deux s.e.v. de E.
i) Montrer que $f(F+G) = f(F)+f(G)$. Si la somme F+G est directe, en est-il de même de $f(F)+f(G)$?
Indication: Considérer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\big((1,1)\big) = (1,1),\ f\big((1,-1)\big) = 0$ qui est la projection sur $F_1 = \mathrm{vect}(1,1)$ parallèlement à $F_1^\perp$ (e.v. orthogonal à F_1).

Même question dans le cas où f est injective.
ii) Montrer que $f^{-1}(F) + f^{-1}(G) \subset f^{-1}(F + G)$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte
Indication: On utilisera celui de la question i) avec F, G distincts de $F_1, F_1^\perp$.

Si la somme F+G est directe, en est-il de même de $f^{-1}(F) + f^{-1}(G)$? (même exemple !).

Même question dans le cas où f est injective.

Exercice 4.13 (moyen)**.** Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application

$$\psi\ : \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ f & \mapsto & \psi(f) \text{ telle que } \forall x \in \mathbb{R},\ \psi(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt\ . \end{array}$$

i) Montrer que ψ est une application linéaire. Est-elle injective?
ii) ("question difficile") Montrer que ψ n'est pas surjective.

Indication: montrer que $\psi(f)$ est dérivable.

Exercice 4.14 (facile)**.** A tout polynôme $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$ (polynômes de degré $\leq n$,) on associe le polynome $Q = -(X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$ (P'= dérivée de P.)

Montrer que l'application

$$f\ :\ \begin{array}{cc} E & \to E \\ P & \mapsto Q \end{array}$$

est linéaire. Est-elle injective? Est-elle surjective ? Déterminer son image.

Exercice 4.15 (difficile)**.** Soit $f : E \to E$ linéaire, E e.v. sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in K,\ f(x) = \lambda_x x$. Montrer que f est une homothétie, i.e. $\exists \lambda \in K$ (indépendant de x) tel que $\forall x \in E,\quad f(x) = \lambda x$.

Exercice 4.16 (moyen)**.** Soit $f : E \to E$ une application linéaire. On suppose que f admet un inverse à gauche, i.e. $g : E \to E$ telle que $f \circ g = I$.
i) Montrer que f est surjective.
ii) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que f est injective. En déduire que f est inversible, et que $g = f^{-1}$.
iii) Soit $E_0 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots)$ (le 1 est à la i^{eme} place). Montrer que $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de E_0.

Soit $f : E_0 \to E_0$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = 0$ et $f(e_{i+1}) = e_i,\ i \geq 0$. Montrer qu'il existe $g : E_0 \to E_0$ telle que $f \circ g = I$, mais que f n'est pas inversible.

Exercices fondamentaux

Exercice 5.1. Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $\varphi : E \to F$ une application linéaire et un sous-ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ de vecteurs de E. Montrer que

$$\varphi(\mathrm{vect}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \mathrm{vect}(\{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}).$$

Exercice 5.2. Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Montrer l'équivalence entre les propriétés :

(1) (a) φ est injective ;
 (b) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$;
 (c) pour toute famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ de E, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une famille libre de F ;
 (d) il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une famille libre de F.

(2) (a) φ est surjective ;
 (b) pour toute famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de E, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une famille génératrice de F ;
 (c) il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une famille génératrice de F.

Exercice 5.3. Soient E un K-espace vectoriel et $\varphi : E \to E$ une application linéaire (endomorphisme de E). Montrer que

(1)
$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi^2) \Rightarrow E = \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Im}(\varphi).$$

(2)
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2) \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0_E\}.$$

(3)
$$E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2) \text{ et } \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi^2).$$

(4) Les réciproques de ces propriétés sont-elles vraies ?

Exercice 5.4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_3, x_1 + x_2, 2x_2 + 2x_3)$$

Montrer qu'elle est linéaire. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$, calculer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5.5. Soient $f,\ g : E \to E$ deux applications linéaires. Montrer que

$$\mathrm{rang}(g \circ f) \leq \inf\left(\mathrm{rang}(g), \mathrm{rang}(f)\right).$$

Exercice 5.6 (moyen)**.** Soient $f,\ g : E \to E$ deux applications linéaires.
a) Montrer que $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}(g \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} g = \{0\}$.
b) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im} g$. Montrer que $\mathrm{Im} g \circ f = \mathrm{Im} g$ si et seulement $\mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} g = E$.
c) En déduire que si $f \circ f = f$, alors $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Exercice 5.7. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
i) Montrer que $(X, X - 1, X^2 + 1, 2X^2 - 3X + 1)$ n'est pas une famille libre.
ii) Montrer que $(X, X - 1, X^2)$ est une famille libre.
iii) Montrer que $(1, X, X^2 - 1, (X^2 - 1)(X + 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3[X]$.

iv) On définit les applications q et r de la façon suivante: Pour tout polynôme P, $q(P)$ est le quotient de la division euclidienne de P par X^2-1, et $r(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par X^2-1. Montrer que q et r sont des applications linéaires de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
v) Donner des bases de l'image et du noyau pour q et pour r.

Exercice 5.8. On définit un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ par la donnée des composantes (X,Y,Z) du vecteur $f(u)$ dans la base canonique en fonction des composantes (x,y,z) du vecteur u dans la base canonique:

$$X=(m-2)x+2y-z;\quad Y=2x+my+2z;\quad Z=2mx+2(m+1)y+(m+1)z\ ,$$

où m est un paramètre réel fixé).

Montrer que le rang de f est égal à 3, sauf pour des valeurs particulières de m que l'on déterminera. Pour ces valeurs, préciser le rang et définir $f(\mathbb{R}^3)$.

Exercices d'entrainement.

Exercice 5.9 (facile)**.** Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ comme ci-dessus, et f l'application linéaire $f:E\to E,\ P\mapsto Q$, $Q(X)=P(X+1)-P(X)$. Déterminer $\mathrm{Ker}f$. On définit $e_j\in E$ par $e_0=1$ et $e_j=X(X-1)\cdots(X-j+1),\ j\geq 1$. Montrer que $(e_j)_{0\leq j\leq n}$ est une base de E, calculer $f(e_j)$ pour tout j et en déduire une base de $\mathrm{Im}f$.

Exercice 5.10 (facile)**.** On définit un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ par la donnée des composantes X,Y,Z,T du vecteur $f(u)$ (dans la base canonique), en fonction des composantes x,y,z,t du vecteur u (dans la base canonique).

$$\begin{array}{rcl} X &=& x+y+z-t\\ Y &=& -x+y-z-t\\ Z &=& x-y-z-t\\ T &=& -x-y+z+3t \end{array}$$

Déterminer le rang de f et définir $f(\mathbb{R}^4)$. Montrer que $f(\mathbb{R}^4)$ n'a pas de point commun avec le domaine $D=\{X>0,Y>0,Z>0,T>0\}$.

Exercice 5.11 (moyen)**.** Soit $x_0,\ldots,x_n$ des réels deux a deux distincts. On définit l'application $\phi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}^{n+1}$ par $\phi(P):=(P(x_0),\ldots,P(x_n))$ pour tout polynome $P\in\mathbb{R}_n[X]$.
i) Démontrer que ϕ est linéaire.
ii) Démontrer que ϕ est injective.
iii) En déduire que pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, il existe un unique polynome $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(x_i)=f(x_i)$ pour tout $i\in\{0,\ldots,n\}$.
iv) Etant donnée une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, le polynome P défini à la question précédente est le polynome d'interpolation de Lagrange associé à f aux points $x_0,\ldots,x_n$. Démontrer qu'il est donné par la formule suivante:

$$P(X)=\sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i)\prod_{0\leq j\leq n, j\neq i}\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

Exercice 6.1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, x_2 + x_3)$.

(1) Déterminer les images des vecteurs de le base canonique.
(2) Ecrire la matrice A de f relativement à la base canonique.

Exercice 6.2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire satisfaisant

$$\varphi(e_1) = (3, 1, 4), \quad \varphi(e_1 + 2e_2) = (5, 0, 1) \text{ et } \varphi(e_1 + e_2 + 3e_3) = (-1, 3, 0)$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer complètement φ et écrire la matrice A de l'application φ relativement à la base canonique.

Exercice 6.3. *Calcul Matriciel: Quelques pièges à éviter.*
i) On donne les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A(B - C)$
ii) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer MN et NM.
iii) Soit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer D^2 et D^3.
iv) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Développer $(A + B)^2$.

Exercice 6.4. Calculer le rang des matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = (1, 2, 3), \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.5. Donner les formes canoniques ligne des matrices suivantes (opérations sur les lignes uniquement) et en déduire leur rang.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}0&1&3&-2\\2&1&-4&3\\2&3&2&-1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&2&1&2\\2&-1&2&5\\5&6&3&2\\1&3&-1&-3\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&1\\1&-1&2&3&1\\2&-2&1&0&2\\1&1&-1&-3&3\end{pmatrix},$$

Exercice 6.6. Le système suivant a-t-il des solutions?

$$\begin{array}{rr|r}-1&2&1\\2&-1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{array}$$

Exercice 6.7. Etudier l'existence et l'unicité des solutions des systèmes linéaires $Ax=b_1$ et $Ax=b_2$ notés globalement $A|b_1b_2$:

$$\begin{array}{rrrrr|rr}2&1&2&0&3&1&2\\5&0&1&0&3&2&1\\1&0&3&0&5&2&3\\1&-1&0&0&1&1&1\end{array}$$

Préciser les équations principales et inconnues principales.

Exercice 6.8. Les systèmes linéaires $Ax=b_1$,... , $Ax=b_4$ sont notés globalement $A|b_1b_2b_3b_4$.

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}1&2&3&4&1&2&0&3\\3&1&3&1&2&2&1&0\\3&2&1&0&3&2&0&1\\0&2&0&2&4&1&0&0\end{array}$$

Etudier l'existence et l'unicité des solutions de ces systèmes. Donner les équations principales et inconnues principales.

Exercice 6.9. Déterminer suivant les valeurs de $m\in\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{c}(1-m)x+(2m+1)y+(2m+2)z=m\\ mx+my=2m+2\\ 2x+(m+1)y+(m-1)z=m^2-2m+9\end{array}\right..$$

Exercice 6.10. Discuter, en fonction des paramètres a, b, c et m, le rang des matrices suivantes:

$$S=\begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&c+a&a+b\\bc&ca&ab\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\3&2&-1&3\\m&3&-2&0\\-1&0&-4&3\end{pmatrix}.$$

$$U=\begin{pmatrix}1-m&2&1-m&2m+1\\0&m+1&0&3m+1\\1&3&1+m&4\\m&2m+1&m&2m+1\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}1&a&1&b\\a&1&b&1\\1&b&1&a\\b&1&a&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 6.11. Déterminer en fonction de α et n le rang des matrices suivantes de $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ $(n\geq 2)$.

$$R=\begin{pmatrix}-1&\alpha&0&\dots&0&0\\0&-1&\alpha&\dots&0&0\\0&0&-1&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&-1&\alpha\\\alpha&0&0&\dots&0&-1\end{pmatrix},$$

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 1+\alpha & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+\alpha & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.12. Calculer l'inverse des matrices suivantes

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \text{(avec } \Pi_1^n \alpha_i \neq 0) .$$

7. Déterminants

Exercice 7.1. Montrer, sans le développer, que le déterminant suivant est nul

$$\begin{vmatrix} 84 & 35 & 62 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} .$$

Exercice 7.2. Factoriser le polynôme en x

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} .$$

Exercice 7.3. Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} .$$

Exercice 7.4. a, b, c étant des réels, calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

(on donnera le résultat sous la forme d'un produit de sinus).

Exercice 7.5. Soit $\omega = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 = 0$.
Calculer

$$D = \begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$$

Exercice 7.6. Démontrer que l'on a, pour a, b et c réels, l'égalité

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 .$$

Exercice 7.7. Sachant qu'entre les côtés a, b, c et les angles A, B, C d'un triangle existent les relations

$$a = b\cos C + c\cos B, \quad b = c\cos A + a\cos C, \quad c = a\cos B + b\cos A ,$$

trouver une relation liant les cosinus des angles A, B et C.

Exercice 7.8. i) Calculer

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

ii) Calculer Δ_n, déterminant de la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à a, et tous les autres éléments sont égaux à 1.

Exercice 7.9. Calculer les déterminantes suivants:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7.10. Les nombres 204, 527 et 255 étant divisibles par 17, montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est aussi divisible par 17.

Exercice 7.11. Montrer, sans les développer, que les déterminants suivants sont nuls

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 7.12. Calculer à l'aide des déterminants les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponses:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B-1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.13. Calculer, à l'aide des déterminants, les inverses des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$$

Exercice 7.14. i) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}. Retrouver A^{-1} à l'aide des déterminants.

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un unique couple (u_n, v_n) de réels tels que

$$A^n = u_n A + v_n I$$

iii) On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. Déterminer (α_n, β_n), puis (u_n, v_n), puis calculer A^n.

Exercice 7.15. Déterminer lorsqu'elles existent, les inverses des matrices suivantes (discuter suivant les valeurs de a, b et c).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix},$$

Exercice 7.16. Déterminer les inverses des matrices d'ordre n suivantes

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix},$$

Exercice 7.17. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et le système (S) $\left\{ \begin{array}{lcl} 2x+3y+z & = & 9 \\ x+2y+3z & = & 6 \\ 3x+y+2z & = & 8 \end{array} \right.$

i) Effectuer en parallèle les deux calculs suivants:
- Résolution de (S);
- Calcul de A^{-1} .

ii) Calculer $B = (A - 6I_3)(A^2 + 3I_3)$ et en déduire une autre manière de calculer A^{-1}.
iii) Calculer A^{-1} à l'aide des déterminants.

Exercice 7.18. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ m & 1-m & m \end{pmatrix}$$

et le système (S) suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (m-1)x+y-z & = & m \\ 2x+my+z & = & 3 \\ mx+(1-m)y+mz & = & m^2 \end{array} \right.$$

i) Résoudre le système (S) en discutant suivant les valeurs de m.
ii) On suppose que $m \neq \pm 1$. Montrer alors que A est inversible et préciser A^{-1}.
iii) Sachant que $(A-(m+1)I_3)(A^2+2(1-m)A+(m^2-1)I_3) = 0$, en déduire une autre façon de calculer A^{-1} (pour $m \neq \pm 1$.
iv) Pour $m = 0$ calculer A^{-1} à l'aide des déterminants.

8. Changement de base

Exercice 8.1. Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

i) Calculer le rang de A. En déduire que A est inversible.
ii) Calculer A^{-1}

- a) En considérant que A est une matrice de changement de base.
- b) En considérant que A est la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ et en calculant f^{-1}.
- c) Retrouver le résultat à l'aide des transformations de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée $A|I$.

iii) Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.2. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y) \ .$$

i) Donner les matrices de f dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$
a) $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique.
b) $B_2 = (b_1, b_2, b_3)$, avec $b_1 = e_3$, $b_2 = e_1$, $b_3 = e_2$.
c) $B_3 = (c_1, c_2, c_3)$, où $c_1 = e_1$, $c_2 = e_1 + e_2$, $c_3 = e_1 + e_2 + e_3$, par un calcul direct, puis en utilisant les matrices de changement de base.

ii) Montrer que la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ représente l'application linéaire $f \ : E \to F$, où $E = F = \mathbb{R}^3$, dans des bases B_4 de E et B_5 de F que l'on précisera.

Exercice 8.3. Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3) = (e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice $\tilde{A}$ de f dans la base B'.
ii) Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les coefficients de la matrice $\tilde{A}^n$. En déduire l'expression de A^n.
iii) On considère les suites réelles (x_n), (y_n) et (z_n) définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 2x_n$, $y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n$ et $z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$. Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 8.4. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver la matrice de passage P de la base canonique (e_1, e_2, e_3) à la base $(e'_1, e'_2, e'_3) = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), ((1, 1, 0))$. calculer P^{-1}.

Exercice 8.5. i) Montrer que

$$B_1 = \big((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\big)$$

et

$$B_2 = \big((3, 1, 4), (5, 2, 3), (1, 1, -5)\big)$$

sont des bases de $\mathbb{R}^3$. calculer la matrice de passage de B_1 vers B_2.
ii) Même question que précedemment dans $\mathbb{R}^4$ avec
$B_1 = \big((1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\big)$ et
$B_2 = \big((1, 0, 3, 3), (-2, -3, -5, -4), (2, 2, 5, 4), (-2, -3, -4, -4)\big)$.

Exercice 8.6. i) Montrer que les polynômes $E_k = X^k(1-X)^{n-k}$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$ forment une base B de $\mathbb{R}_n[X]$.
ii) Former la matrice de passage P de la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ à la base B, ainsi que la matrice inverse. Expliciter le cas $n = 3$. (pour P^{-1}, utiliser l'écriture $X^k = 1^{n-k}X^k$).

Exercice 8.7. i) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.
ii) Soient $Q_0 = 1$, $Q_k = (X+1)^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Montrer que $B = (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est le coefficient de la matrice de passage de la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ à la base B? Quel est le coefficient de la matrice de passage de B à la base canonique?
iii) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n-1$. Soit (E_p) l'équation suivante

$$\sum_{k=0}^{p-1} 2^k x_k + (2^p + p!)x_p + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{k! + 2^k(k-p)!}{(k-p)!} x_k = 1 \ .$$

Soit (E_n) l'équation suivante

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k x_k + (2^n + n!)x_n = 1 + n!$$

Résoudre le système à $n+1$ équations et $n+1$ inconnues réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formé par les équations $(E_0), (E_1), \ldots, E_n$.
Indication: prendre pour inconnue auxiliaire $S = \sum_{k=0}^{n} 2^k x_k$ *et utiliser les questions i) et ii)*

Exercice 8.8. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. défini par

$$f(x, y, z) = (7y - 6z, -x + 4y, 2y - 2z) \ .$$

i) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.
ii) Soient $u_1 = (9, 3, 2)$, $u_2 = (5, 1, 2)$ et $u_3 = (4, 2, 1)$. Montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et trouver la matrice de passage P de B vers B'
iii) Trouver la matrice A' de f par rapport à la base B'.

Exercice 8.9. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On définit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ par $f(P) = (1 - X^2)P'' - 2XP'$.
i) Montrer que f est une application linéaire.
ii) Donner la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
iii) Calculer le rang de f.
iv) Donner une base de $\mathrm{Ker}f$ et de $\mathrm{Im}f$.
v) Montrer que $B' = (X^3, 1 - X^2, -2X, 1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer la matrice de f dans la base B'.

Exercice 8.10. Soient les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z,\ y + 2z) \ ,$$

et

$$g(x, y) = (x - y,\ x - 2y,\ x - 3y) \ .$$

i) Donner, dans les bases canoniques $B = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $C = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$,les matrices de f et g.
ii) Calculer les matrices de $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les bases précédentes. En déduire l'expression de $(g \circ f)(x, y, z)$ et $(f \circ g)(x, y)$.
iii) Calculer le rang de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.
iv) Parmi les applications linéaires précédentes, préciser celles qui sont injectives, surjectives, bijectives.
v) Pour chaque application linéaire précédente, calculer le noyau et l'image.

v) Lorsque l'une de ces applications est bijective, calculer son application inverse et la matrice de cet inverse dans la base canonique.

Exercice 8.11. Soit l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x + 5y - z, 2y + 3z, 2z) \ .$$

i) Trouver la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
ii) En écrivant $A = 2I + B$ (B à déterminer), calculer A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
iii) En déduire $f^n(x, y, z)$ où f^n signifie ici $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$, n fois.

9. Réduction des endomorphismes - Diagonalisation - Trigonalisation

Exercice 9.1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Diagonaliser ces matrices.

Exercice 9.2. Exprimer A^n sous la forme d'une matrice 2×2 (avec n entier positif)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 9.3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Diagonaliser ces matrices.

Exercice 9.4. Trouver une matrice orthogonale Q telle que $Q^t A Q$ soit une matrice diagonale, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.5. Pour les matrices suivantes, calculer les valeurs propres et les vecteurs propres. Diagonaliser, quand c'est possible, sinon trigonaliser. Ecrire les matrices de passage qui permettent de passer de la matrice de départ à sa forme réduite.

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1-it & 0 & 2it & 0 \\ 0 & 1-it & 2it & 0 \\ 0 & 0 & 1+it & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+it \end{pmatrix}$$

Exercice 9.6. i) Montrer que si λ est valeur propre de A, alors λ^n est valeur propre de A^n, $n \in \mathbb{N}$.
ii) Déterminer toutes les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
iii) Montrer que si A est une matrice inversible, A et A^{-1} ont mêmes vecteurs propres. Donner les valeurs propres de A^{-1} en fonction de celles de A.

Exercice 9.7. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) .$$

i) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés des matrices A et B.
ii) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables?
iii) Mêmes questions si on considère A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Exercice 9.8. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire qui à $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & 4\,x_3\ , \\ y_2 & = & x_1 + 2\,x_2 + x_3\ , \\ y_3 & = & 2\,x_1 + 4\,x_2 - 2\,x_3\ . \end{array} \right.$$

i) Ecrire la matrice de f dans la base canonique.
ii) Calculer les valeurs propres de f. Vérifier que f est diagonalisable.
iii) Est-ce que f est un automorphisme?
iv) Calculer les vecteurs propres de f.
v) Soit B' la base constituée des vecteurs propres (on ordonnera les vecteurs de B' en respectant l'ordre croissant des valeurs propres). Ecrire la matrice de passage P de B vers B'. Calculer P^{-1}.
vi) On considère l'endomorphisme g défini par $g = f^3 - 9\,f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ où on a noté $f^3 = f \circ f \circ f$. Calculer la matrice de g dans B' puis calculer la matrice de g dans B.

Exercice 9.9. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = X^3 P\left(\frac{1}{X}\right)$.
i) Vérifier que $f(P) \in \mathbb{R}_3(X)$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer $f \circ f$.
ii) Expliciter la matrice A associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$: $B = (1, X, X^2, X^3)$.
iii) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Exercice 9.10. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que A n'est pas diagonalisable. Trigonaliser A.

Exercice 9.11. On considère r_θ la rotation directe dans $\mathbb{R}^3$ d'axe (Oz) et d'angle $\theta \neq \pi + k\pi$. Montrer que r_θ n'admet qu'une seule direction propre.