

**Exercice 1.**

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) := e^{\frac{x \ln x}{1-x}}$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$ .
- 2) Déterminer le développement limité à l'ordre deux en 1 de  $\ln x$ , puis le développement limité à l'ordre un en 1 de  $\frac{x \ln x}{1-x}$ .
- 3) Déterminer le développement limité à l'ordre un en  $-1$  de l'exponentielle, puis le développement limité à l'ordre un en 1 de  $f$ . En déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

Soit  $g$  et  $h$  les applications de  $]0, \infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définies par  $h(x) := 1 - x + \ln x$  puis  $g(x) := f(x)$  si  $x \neq 1$  et  $g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  si  $x = 1$ .

- 4) La fonction  $g$  est-elle continue en 1?
- 5) Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0, \infty[$  tel que  $x \neq 1$ . En utilisant la définition de dérivée et la question 3), montrer que  $g$  est dérivable en 1 et calculer  $g'(1)$ .
- 6) Calculer  $h'(x)$  pour tout  $x \in ]0, \infty[$  puis  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ . Enfin, dresser le tableau de variation de  $h$  puis déterminer le signe de  $h$ .
- 7) En utilisant les questions 5) et 6), déterminer le signe de  $g'$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ , puis dresser le tableau de variation de  $g$ .

**Exercice 2.**

- 1) Factoriser les trois fonctions polynômiales  $a(x) := 4x^2 + 4x + 1$  puis  $b(x) := 2x^2 + 5x + 2$  et enfin  $c(x) := x^2 + 4x + 4$ .

Soit la relation de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par:  $x \mathcal{R} y$  ssi  $a(x)y^2 + 2b(x)y + c(x) = 0$ .

- 2) Montrer que  $\mathcal{R}$  n'est pas une application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  (on trouvera un point  $x$  qui n'a pas d'image, c'est à dire tel que l'ensemble  $\{y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y\}$  est vide).
- 3) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  (on montrera que tout point  $x$  a au plus une image, c'est à dire que l'ensemble  $\{y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y\}$  a au plus un élément), dont on déterminera le domaine de définition  $D$ .
- 4) Soit  $(x, y) \in D \times \mathbb{R}$  tel que  $x \mathcal{R} y$ . Calculer  $y$  en fonction de  $x$ .

**Exercice 3.**

Montrer que  $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{2 + 4x + 4x^2} = \frac{\pi}{8}$ .

FIN

**Exercice 1.** Pour tout nombre réel  $t$ , on note  $f_t$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $f_t(x) := \frac{x^3}{3} - t^2x + 1$ .

- 1) Calculer la dérivée de  $f_t$  en un point  $x \in \mathbb{R}$ .
- 2) Calculer les solutions réelles de l'équation  $f_t'(x) = 0$ .
- 3) Montrer que si l'équation  $f_t(x) = 0$  possède exactement deux solutions réelles distinctes alors l'une de ces solutions est racine simple du polynôme  $f_t$  et l'autre est racine double.
- 4) Montrer qu'il existe un unique nombre réel strictement positif  $t_0$  pour lequel l'équation  $f_{t_0}(x) = 0$  possède exactement deux solutions réelles distinctes. Calculer  $t_0$ .
- 5) En utilisant la formule de Taylor, montrer que  $f_{t_0}(x) = \frac{1}{3}(x - t_0)^2(x + 2t_0)$ .

Dans les questions 6), 7) et 8) on suppose que  $t$  est un nombre réel satisfaisant à :  $-t_0 < t < t_0$ .

- 6) Montrer que l'équation  $f_t(x) = 0$  possède une et une seule solution réelle.
- 7) On note  $x(t)$  la solution réelle de l'équation  $f_t(x) = 0$  et on admet que la fonction  $t \rightarrow x(t)$  de  $(-t_0, t_0)$  dans  $\mathbb{R}$  est deux fois dérivable dans  $(-t_0, t_0)$ .
  - a) Calculer  $x(0)$ .
  - b) Montrer que  $x'(t)(x^2(t) - t^2) = 2tx(t)$  puis calculer  $x'(0)$ .
  - c) Calculer  $x''(0)$  puis écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction  $t \rightarrow x(t)$ .
- 8) Soient  $u$  et  $v$  deux nombres réels satisfaisant  $u < v$ . On suppose que  $u$  et  $v$  sont les deux racines de l'équation  $x^2 - 3x + t^6 = 0$ .
  - a) Montrer que  $u + v = 3$  et  $uv = t^6$ .
  - b) On pose  $a := -u^{\frac{1}{3}}$  et  $b := -v^{\frac{1}{3}}$ . Montrer que  $a + b$  est la solution réelle de l'équation  $f_t(x) = 0$ .
  - c) Calculer  $a + b$ .

**Exercice 2.** Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction

$$f(x) := \frac{2x}{1 + x^4}.$$

**Exercice 3.** Calculer l'intégrale

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)x^2}.$$

**Fin**

### Solution de l'exercice 1

1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_t(x) = x^2 - t^2$ .

2) Les solutions de l'équation  $f'_t(x) = 0$  sont  $x := t$  et  $x := -t$ .

3) L'équation  $f_t(x) = 0$  possède trois solutions complexes au plus dont deux sont réelles. Elle possède donc une racine non réelle au plus. Or, si un nombre complexe  $z$  est solution de l'équation à coefficients réels  $f_{\varepsilon_0}(x) = 0$  alors  $\bar{z}$  l'est aussi, donc cette équation ne possède pas de solution non réelle. Par suite, cette équation possède une racine réelle simple et une racine réelle double.

4) Soit  $t$  un nombre réel strictement positif. D'après la question 3), pour que l'équation  $f_t(x) = 0$  possède deux solutions réelles distinctes il faut et il suffit que le système de deux équations à une inconnue ;

$$(S) \quad f_t(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'_t(x) = 0$$

possède exactement une solution réelle. Comme ce système équivaut à

$$f_t(x) = 0 \quad \text{et} \quad (x = t \text{ ou } x = -t)$$

et que  $f_t(-t) = \frac{2}{3}t^3 + 1 > 0$ , on en déduit que l'équation  $f_t(x) = 0$  possède deux solutions réelles distinctes si et seulement si  $f_t(t) = 0$ , c'est à dire si et seulement si  $-\frac{2}{3}t^3 + 1 = 0$ . Cette dernière équation possède une solution unique qui est

$$t_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

5) Puisque  $f_{t_0}(t_0) = 0$ ,  $f'_{t_0}(t_0) = 0$ ,  $f''_{t_0}(t_0) = 2t_0$  et  $f'''_{t_0}(t_0) = 2$ , il résulte de la formule de Taylor que

$$f_{t_0}(x) = 2t_0 \frac{(x - t_0)^2}{2} + 2 \frac{(x - t_0)^3}{6} = \frac{1}{3}(x - t_0)^2(x + 2t_0).$$

6)  $f_t(x)$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $f_t(-t) = \frac{2}{3}t^3 + 1 > 0$  et  $f_t$  est continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction  $f_t$  admet au moins un zéro dans l'intervalle  $(-\infty, -t)$ . Comme  $f_t$  est strictement croissante dans cet intervalle,  $f_t$  admet un seul zéro dans l'intervalle  $(-\infty, -t)$ .  $f_\varepsilon$  n'a pas d'autre zéro car pour tout  $x \in [-t, +\infty)$ , on a  $f_t(x) \geq f_t(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 1 > -\frac{2}{3}t_0^3 + 1 = 0$  donc  $f_t(x) > 0$ .

7a) On a  $\frac{x^3(0)}{3} + 1 = 0$  donc  $x(0) = -3^{\frac{1}{3}}$ .

7b) On a  $\frac{x^3(t)}{3} - t^2x(t) + 1 = 0$  donc  $x^2(t)x'(t) - 2tx(t) - t^2x'(t) = 0$  donc

$$x'(t)(x^2(t) - t^2) = 2tx(t).$$

Dans le cas particulier  $t = 0$ , on obtient  $3^{\frac{2}{3}}x'(0) = 0$  donc  $x'(0) = 0$ .

7c) De l'équation obtenue en 7c), on déduit

$$x''(t)(x^2(t) - t^2) + x'(t)(2x'(t)x(t) - 2t) = 2x(t) + 2tx'(t).$$

Pour  $t = 0$ , on obtient  $3^{\frac{2}{3}}x''(0) = -2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$  donc  $x''(0) = -2 \cdot 3^{-\frac{1}{3}}$ . Par Taylor,

$$x(t) = -3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}t^2 + t^2\varepsilon(t).$$

8a) On a  $(x-u)(x-v) = x^2 - 3x + t^6$  donc  $x^2 - (u+v)x + uv = x^2 - 3x + t^6$  donc  $u+v = 3$  et  $uv = t^6$ .

8b) On a  $f_t(a+b) = \frac{a^3+b^3}{3} + (ab-t^2)(a+b) + 1$ . Comme  $ab = (uv)^{\frac{1}{3}} = t^2$  et  $a^3+b^3 = -(u+v) = -3$ , on en déduit que  $f_t(a+b) = 0$ .

8c) Par hypothèse  $|t| < t_0 = (\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}}$  donc  $9 - 4t^6 > 0$  donc les solutions de l'équation  $x^2 - 3x + t^6 = 0$  sont

$$u = \frac{3 - \sqrt{9 - 4t^6}}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{3 + \sqrt{9 - 4t^6}}{2}.$$

Par suite,

$$a+b = -\left(\left(\frac{3-\sqrt{9-4t^6}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3+\sqrt{9-4t^6}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

### Solution de l'exercice 2.

On pose  $t = x^2$ , donc  $dt = 2x dx$ . Par suite,

$$f(x)dx = \frac{2x dx}{1+x^4} = \frac{dt}{1+t^2} = d(\arctan t).$$

Toute primitive  $F$  de  $f$  est de la forme

$$F(x) = c + \arctan x^2$$

où  $c$  est une constante réelle.

### Solution de l'exercice 3.

$$\frac{1}{(1+x^2)x^2} = \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

donc une primitive de la fonction  $\frac{1}{(1+x^2)x^2}$  dans l'intervall  $(0, +\infty)$  est

$$F(x) = -\frac{1}{x} - \arctan x.$$

Par suite,

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)x^2} = F(\sqrt{3}) - F(1)$$

Or  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$  et  $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$  donc

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)x^2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{12}.$$

**Fin**

**Exercice 1.** On note  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(x) := \frac{x \ln x}{x - 1},$$

si  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ .

- 1) La fonction  $f$  est-elle continue en 0?
- 2) Montrer que  $f$  est continue en 1.
- 3) Montrer que  $f$  est dérivable en 1 et que  $f'(1) = \frac{1}{2}$ .
- 4) Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ .
- 5) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ .
- 6) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de  $f$ .

**Exercice 2.** On rappelle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que la somme des  $n$  premiers entiers impairs est un carré parfait.
- 2) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

**Exercice 3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction  $f_n$  définie dans  $]0, \infty[$  par

$$f_n(x) := x^n \ln x.$$

**Exercice 4.** Soit le polynôme  $P(x) = (1+x)^4 + 2x^2(1+x)^2 + x^4$ .

- 1) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P(x) \geq \frac{1}{4}.$$

- 2) Factoriser le polynôme dans le corps des nombres complexes.

**Fin**

### Solution de l'exercice 1.

1) La fonction  $f$  est continue en 0 car  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

2) Pour tout  $x > 0$ , on a :  $\ln x = \ln(1 + (x - 1)) = (x - 1) + (x - 1)\varepsilon(x - 1)$ . Par suite, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , on a :

$$f(x) - f(1) = (x - 1) + x\varepsilon(x - 1),$$

donc  $f$  est continue en 1.

3) Pour tout  $x > 0$ , on a :  $\ln x = \ln(1 + (x - 1)) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + (x - 1)^2\varepsilon(x - 1)$ .

Par suite, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , on a :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x \ln x - (x - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x - 1),$$

donc  $f$  est dérivable en 1 et  $f'(1) = \frac{1}{2}$ .

4) Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , on a :

$$f'(x) = \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1)^2}.$$

5) Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Si  $x < 1$  alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]x, 1[$  tel que

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c} > 1 \quad \text{donc} \quad \ln x < x - 1 \quad \text{donc} \quad f'(x) > 0.$$

Si  $x > 1$  alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]1, x[$  tel que

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c} < 1 \quad \text{donc} \quad \ln x < x - 1 \quad \text{donc} \quad f'(x) > 0.$$

6) Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , on a :

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + (x - 1)^4\varepsilon(x - 1).$$

Il en résulte que

$$f(x) = 1 + \frac{(x - 1)}{2} - \frac{(x - 1)^2}{6} + \frac{(x - 1)^3}{12} + (x - 1)^3\varepsilon(x - 1).$$

### Solution de l'exercice 2.

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $S_n$  la somme des  $n$  premiers entiers impairs. On a

$$S_n := \sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = n(n + 1) - n = n^2.$$

2) Notons  $A_n := \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$  et  $B_n := \sum_{k=1}^n k^3$ . On a  $A_1 = B_1$  et si  $A_n = B_n$  alors

$$A_{n+1} = \left((n + 1) + \sum_{k=1}^n k\right)^2 = (n + 1)^2 + 2(n + 1) \sum_{k=1}^n k + A_n = (n + 1)^3 + B_n = B_{n+1}.$$

On en déduit que  $A_n = B_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Solution de l'exercice 3.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\begin{aligned}x^n \ln x dx &= \ln x d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\&= -\frac{x^{n+1}}{n+1} d(\ln x) + d\left(\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1}\right) \\&= -\frac{x^n}{n+1} dx + d\left(\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1}\right) \\&= d\left(-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1}\right)\end{aligned}$$

En conclusion  $F_n$  est une primitive de  $f_n$  dans  $]0, \infty[$  si et seulement si il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x > 0$

$$F_n(x) = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} + C$$

### Solution de l'exercice 4.

1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned}P(x) &= (1+x)^4 + 2x^2(1+x)^2 + x^4 \\&= ((1+x)^2 + x^2)^2 \\&= (2x^2 + 2x + 1)^2 \\&= \left(x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

2) Pour tout nombre complexe  $x$ , on a

$$\begin{aligned}P(x) &= \left(x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\&= \left(x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 \\&= \left(x\sqrt{2} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(x\sqrt{2} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2.\end{aligned}$$

**fin**

**Exercice 1.** On rappelle que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que la somme des  $n$  premiers entiers impairs est un carré parfait.
- 2) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

**Exercice 2.** Soient  $a$  et  $b$  deux paramètres réels. On considère l'équation  $(E)$  du troisième degré :  $z^3 + az + b = 0$ .

- 1) Montrer que l'équation  $(E)$  possède au moins une racine réelle.  
Dans toute la suite de l'exercice, on suppose de plus que  $a > 0$ .
- 2) Montrer que l'équation  $(E)$  possède une et une seule racine réelle.
- 3) Montrer que la racine réelle de  $(E)$  est une racine simple.
- 4) Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels. Montrer que si  $y \neq 0$  et  $x + iy$  est une racine de  $(E)$  alors  $x$  est le seul nombre réel qui vérifie  $8x^3 + 2ax - b = 0$  et

$$y = \sqrt{a + 3x^2} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{a + 3x^2}.$$

**Exercice 3.** On note  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(x) := \frac{x \ln x}{x - 1},$$

si  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ .

- 1) La fonction  $f$  est-elle continue en 0?
- 2) Montrer que  $f$  est continue en 1.
- 3) Montrer que  $f$  est dérivable en 1 et que  $f'(1) = \frac{1}{2}$ .
- 4) Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ .
- 5) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ .
- 6) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de  $f$ .

**Fin**