NOM/Prénom :

UTLN - M1 MEEF Maths - Contrôle Continu 1 **Durée : 1h45 minutes**

Exercice 1. (1) Donnez une définition ensembliste de *“combinaison de k parmi n”*.
(2) On prend maintenant la définition du lycée : Si on appelle schéma de Bernoulli à n épreuves, de paramètre p, la répétition de n expériences indépendantes et identiques de Bernoulli de paramètre p, alors on définit $\binom{n}{k}$ comme le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès dans l'arbre de probabilité du schéma de Bernoulli. Utilisez cette définition du lycée pour démontrer l'égalité suivante, en précisant les valeurs de n et k pour lesquelles cette égalité a un sens

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 2. On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

(1) On suppose que les 10 billes sont de couleurs différentes. De combien de façons différentes peut-on les ranger ?

(2) On suppose maintenant qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes, et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.

  (a) De combien de façons différentes peut-on les ranger ?

  (b) De combien de façons différentes peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleur ?

  (c) Même question mais seules les rouges doivent être groupées.

Exercice 3. (6pts) On dispose d'un alcootest fiable à 98%, c'est-à-dire que 98% des personnes ayant bu de l'alcool ont un test positif et 98% des personnes n'ayant pas bu d'alcool ont un test négatif. On sait qu'à un moment donné où le test est effectué, 4% des automobilistes ont bu de l'alcool.

(1) Rappelez un énoncé complet de la formule des probabilités totales.

(2) Calculer la probabilité qu'un alcootest effectué sur un automobiliste pris au hasard soit positif. Vous donnerez pour cette question une correction niveau terminale S.

(3) Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait bu de l'alcool sachant que le test est positif (pour cette question, on n'impose pas de rédaction niveau lycée).

Exercice 4. On se donne un entier n strictement positif. Dans le plan rapporté à un repère d'origine O, on considère l'ensemble des points $M(x, y)$ avec x, y dans $\mathbb{N}$. Un pion est initialement placé en O. On effectue de façon aléatoire n déplacements de ce pion selon deux directions possibles en lançant une pièce équilibrée :

— vers le haut, en passant du point de coordonées (x, y) à celui de coordonnées $(x, y + 1)$ si l'on obtient pile ;

— vers la droite, en passant du point de coordonées (x, y) à celui de coordonnées $(x + 1, y)$ si l'on obtient face ;

1) Dessiner toutes les trajectoires possibles lorsque $n = 3$ sur les quadrillages donnés en annexe page suivante (une trajectoire par quadrillage)
2) Dans le cas général (n quelconque), quel est le nombre de trajectoires possibles.
3) Toujours dans le cas général, décrire l'ensemble A_n des points que peut atteindre le pion à l'issue des n déplacements.
4) Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ et soit M_k le point de A_n d'abscisse k.
  a) Quelle est la probabilité pour que le pion arrive en M_k au bout de n déplacements ?
  b) Sachant qu'à l'issue des n déplacements, le pion est en M_k, quelle est la probabilité que le premier déplacement du pion ait été vers la droite ?

Annexe Compléter pour avoir toutes les trajectoires possibles lorsque $n = 3$. Une trajectoire par quadrillage : tous ne serviront peut-être pas.