Université du Sud Toulon-Var. Licence MASS 3ème année, 2009-10

Documents interdits. Calculatrices autorisées. Durée: 2h00.

Exercice 1. Un astronome souhaite mesurer la distance d, en années lumière, entre son observatoire et une étoile lointaine. Bien qu'il connaisse une technique de mesure, il sait aussi que chaque résultat ne constitue qu'une valeur approchée de la distance réelle d, en raison des influences atmosphériques et des erreurs des appareils de mesure. Par conséquent, notre astronome prévoit d'effectuer un nombre N de mesures et d'accepter leur moyenne comme estimation de la distance réelle. Il a des raisons de penser que les différentes valeurs mesurées sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance commune d (d est la distance réelle), et de variance commune estimée à 4 (l'unité étant l'année lumière).

Estimer la valeur N minimale pour être sûr à 95% au moins que la moyenne des N mesures effectuées s'écarte de la valeur réelle d au plus de 0,5 années lumière.

Correction. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, on définit la variable aléatoire X_i de $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ dans $\mathbb{R}$ qui modélise la $i^{\text{ème}}$ mesure, telle que $\mathbb{E}(X_i) = d$ et $\text{Var}(X_i) = 4$. On suppose de plus que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées.

On cherche le plus petit entier N tel que

$$\mathbb{P}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \in [d-0.5,\, d+0.5]) = 95\%$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i - Nd}{\sqrt{N\text{Var}(X_i)}} \in \left[\frac{N(d-0.5)-Nd}{\sqrt{4N}},\, \frac{N(d+0.5)-Nd}{\sqrt{4N}}\right]\right) = 95\%$$

Les variables aléatoires X_i étant indépendantes et identiquement distribuées, on peut, en utilisant le théorème de la limite centrale, approximer $\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{N\text{Var}(X_i)}}$ par la loi normale U de loi $\mathcal{N}(0,\,1)$.

On résoud alors

$$\mathbb{P}\left(U \in \left[\frac{-0.5N}{\sqrt{4N}},\, \frac{0.5N}{\sqrt{4N}}\right]\right) = 95\%$$

i.e.,

$$\Phi(\frac{0.5N}{\sqrt{4N}}) - \Phi(-\frac{0.5N}{\sqrt{4N}}) = 0.95 \;\Leftrightarrow 2\Phi(\frac{0.5N}{\sqrt{4N}}) = 0.95+1 \Leftrightarrow \frac{0.5N}{\sqrt{4N}} \simeq 1.96\ .$$

On trouve $N \simeq 61.5$. Comme N est entier, on prend $N = 62$.

Exercice 2. Chaque matin, une personne doit prendre un bus qui l'amène directement sur son lieu de travail. Pour aller de chez elle jusqu'à l'arrêt de bus, la personne met 15 mn à pied. Le temps d'attente à l'arrêt de bus est modélisé par une variable aléatoire X_1 qui suit une loi uniforme sur $[0, 10]$ (le temps est exprimé en minutes). Le temps de parcours du bus jusqu'au lieu de travail est modélisé par une variable aléatoire X_2 de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/10$.

Soit Z la variable aléatoire qui modélise le temps total mis par la personne pour aller de chez elle jusqu'à son lieu de travail.

i) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$, $\mathbb{E}(X_2)$, et $\mathbb{E}(Z)$.

ii) Donner la loi de Z.

iii) Quelle est la probabilité que cette personne mette plus de 35 min pour arriver à son travail. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près cette probabilité.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire qui suit un loi exponentielle de paramètre λ.

i) Soit $Y = [X]$ la partie entière de X. Calculer la loi de Y.

ii) Soit $T = X^2$. Calculer la loi de T.

Correction. c.f. TD.

Exercice 4. A l'occasion d'un concert de musique organisé dans une salle de spectacle, on décide de fabriquer en direct un CD des chansons des artistes qui participent à la manifestation. Le CD sera vendu à l'issu du concert (et uniquement à ce moment là).

On estime que chaque personne présente à la manifestation a 30% de chance d'acheter ce CD.

Le nombre de personnes qui seront présentes à la manifestation est de 4000.
i) Quelle est la probabilité que les organisateurs vendent au moins 1100 CD.
ii) Quel est le nombre maximum de CD que les organisateurs doivent fabriquer pour être sûrs à 95% d'écouler la totalité du stock?

Correction. Pour chaque entier i on définit la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ personne présente au concert achète le CD et qui vaut 0 sinon. D'après l'énoncé, on a $\mathbb{E}(X_i) = 0.3$. Comme X_i est une variable alétoire de Bernouilli, on déduit aussi $\mathrm{Var}(X_i) = 0.3(1 - 0.3) = 0.21$.

On suppose de plus que les variables aléatoires X_i sont indépendantes.

i) La probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{4000} X_i \geq 1100\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4000} X_i - 4000\,\mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{4000\mathrm{Var}(X_i)}} \geq \frac{1100 - 0.3 \times 4000}{\sqrt{4000 \times 0.21}}\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4000} X_i - 4000\,\mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{4000\mathrm{Var}(X_i)}} \geq 3.45\ .\right)$$

Comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes et indentiquement distribuées, en utilisant le théorème de la limite centrale, on peut estimer cette probabilité en remplaçant $\frac{\sum_{i=1}^{4000} X_i - 4000\,\mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{4000\mathrm{Var}(X_i)}}$ par la loi normale U centrée réduite. On a donc

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{4000} X_i \geq 1100\right) \simeq \mathbb{P}(U \geq -3.45) = \mathbb{P}(U \leq 3.45) \simeq 99,97\%\ .$$

ii) On cherche N tel que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{4000} X_i \geq N\right) = 95\% \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4000} X_i - 4000\,\mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{4000\,\mathrm{Var}(X_i)}} \geq \frac{N - 4000 \times 0.3}{\sqrt{4000 \times 0.21}}\right) = 95\%.$$

En approximant $\frac{\sum_{i=1}^{4000} X_i - 4000\,\mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{4000\,\mathrm{Var}(X_i)}}$ par U comme précedemment, on résoud

$$\mathbb{P}\left(U \geq \frac{N - 4000 \times 0.3}{\sqrt{4000 \times 0.21}}\right) = 95\%\ ,$$

ce qui donne

$$\frac{N - 4000 \times 0.3}{\sqrt{4000 \times 0.21}} \simeq -0.65\ ,$$

et donc $N = [1181.16] = 1182$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire d'espérance finie $\mathbb{E}(X)$. La propriété suivante est-elle vraie? (Justifier votre réponse).

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}(X)) = 1/2.$$

Correction. Cette propriété est fausse. Il suffit de considérer une variable aléatoire de Bernouilli $X \sim \mathcal{B}(p = 0.2)$. On a alors $\mathbb{E}(X) = p$ et

$$\mathbb{P}(\,X \leq \mathbb{E}(X)\,) = \mathbb{P}(X \leq p) = \mathbb{P}(X = 0) = (1 - p) = 0.8 \neq 0.5\ .$$