

Exercice 1. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} y'''(t) + 2y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- (1) Justifier l'existence et l'unicité de la solution par le théorème de Cauchy sur les équations différentielles (cas linéaire).

Réponse : En posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, le problème de Cauchy est équivalent à

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

On a alors une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $Y' = A(t)Y + B(t)$ où $A(t) = A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $B(t)$ est égal au vecteur nul pour tout t . On a donc $A(\cdot)$ qui est une application continue de \mathbb{R} à valeur dans l'ensemble des applications linéaires bornées $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \simeq \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Le théorème de Cauchy sur les équations différentielles dans le cas linéaire s'applique, et le problème (2) admet donc une solution unique Y définie sur \mathbb{R} . En particulier, la première coordonnée y de Y est bien définie sur tout \mathbb{R} et est l'unique solution du problème (1). \square

- (2) Résoudre ce problème.

Réponse : Le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$ vérifie $P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$. La matrice A admet trois valeurs propres réelles de multiplicité 1, donc A est diagonalisable dans \mathbb{R} . On pose $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -2$. On trouve respectivement trois vecteurs propres associés (qui seront finalement inutiles pour la résolution du problème initial) :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Toutes les solutions de $Y' = AY$ sont de la forme

$$Y(t) = C_1 e^{-t} U_1 + C_2 e^t U_2 + C_3 e^{-2t} U_3, \quad C_1, C_2, C_3 \text{ dans } \mathbb{R}$$

donc toutes les solutions y de $y'''(t) + 2y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$ sont de la forme

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^{-2t} \quad (3)$$

Remarque : Notez que quelles que soient les valeurs des premières coordonnées de U_1 , U_2 , et U_3 , comme C_1 , C_2 , et C_3 sont arbitraires, l'expression (3) reste la même. Cela signifie en particulier qu'il n'était pas nécessaire de calculer U_1 , U_2 et U_3

L'unique solution qui vérifie $y''(0) = y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est obtenue pour les valeurs de C_1 , C_2 et C_3 telles que :

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0, \quad -C_1 + C_2 - 2C_3 = 1, \quad C_1 + C_2 + 4C_3 = 0$$

On trouve $C_3 = 0$, $C_1 = -\frac{1}{2}$ et $C_2 = 1/2$. La solution du problème initial est donc

$$y(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \text{sh}(t)$$

Exercice 2. On considère le problème de Cauchy non linéaire suivant

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t)e^{-(ty(t))^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

- (1) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale (I, y_0) .

Réponse : L'équation $y'(t) = ty(t)e^{-(ty(t))^2}$ est de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$ où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(t, y) = ty e^{-(ty)^2}$, qui est infiniment différentiable sur \mathbb{R}^2 donc continue sur \mathbb{R}^2 et localement lipschitzienne dans la seconde variable puisque ses dérivées partielles sont définies et continues sur \mathbb{R}^2 . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard, l'équation admet une solution maximale unique (I, y_0) . \square

- (2) Montrer que y_0 est paire

Réponse : Soit (I, y_0) la solution maximale. On définit sur $J = \{-x; x \in I\}$ la fonction $z(t) = y_0(-t)$. Comme I est un voisinage de 0, alors J est aussi un voisinage de 0. On a $z(0) = y_0(0) = 1$. On a aussi $z'(t) = (y_0(-t))' = -y_0'(-t) = -\left((-t)y_0(-t)e^{-((-t)y_0(-t))^2}\right)' = tz(t)e^{-(tz(t))^2}$. Ici, dans la troisième égalité, on a utilisé le fait que (I, y_0) était solution de (4) et que $-t \in I$ quand $t \in J$. On a donc obtenu que pour tout $t \in J$, $z'(t) = tz(t)e^{-(tz(t))^2}$, ce qui implique que z est aussi solution du problème (4). Comme z et y sont toutes les deux solutions de (4) et toutes les deux définies sur un voisinage de 0, par unicité de la solution du problème de Cauchy, on obtient que (I, y) et (J, z) sont identiques. En particulier $I = J$ est un intervalle symétrique par rapport à 0, et pour tout $t \in I$, on a $-t \in I$ et $y_0(t) = z(t) = y_0(-t)$. Donc y est paire. \square

- (3) En remarquant que la fonction nulle $y_1 \equiv 0$ est solution de $y'(t) = ty(t)e^{-(ty(t))^2}$, en déduire que la solution y_0 du problème de Cauchy (4) est positive et ne s'annule jamais.

Réponse : Supposons que la fonction y_0 s'annule en un point $x_0 \in I$. Pour cette valeur de x_0 , on obtient que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t)e^{-(ty(t))^2} \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

admet une unique solution maximale. Comme y_0 et la fonction nulle y_1 sont toutes les deux solutions de ce problème, et que y_1 est solution sur tout \mathbb{R} , on en déduit par unicité de la solution de (5) que $y_0 = y_1$ sur $I \cap \mathbb{R} = I$. Ce qui est impossible car $y_0(0) = 1$ alors que $y_1(0) = 0$. Donc, la fonction y_0 ne s'annule jamais sur I . Par ailleurs, comme y_0 est dérivable, elle est continue, et donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, est toujours du même signe puisqu'elle ne s'annule jamais. Comme $y_0(0) = 1 > 0$, on en déduit que $y_0(t) > 0$ pour tout $t \in I$. \square

- (4) Montrer que y_0 est strictement croissante sur $I \cap \mathbb{R}_+$ et que $y_0(t) \geq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Réponse : Comme $y_0(t) > 0$ pour tout $t \in I$, alors, $y_0'(t) = ty_0(t)e^{-(ty_0(t))^2} > 0$ pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}_+$, et donc y_0 est strictement croissante sur $I \cap \mathbb{R}_+$. Comme de plus y_0 est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , et que $y_0(0) = 1$, on en déduit que $y_0(t) \geq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, puis par parité, que $y_0(t) \geq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. \square

- (5) Si $T_+ := \sup I < +\infty$, que peut-on dire (par un résultat du cours) de

$$\lim_{t \rightarrow T_+, t < T_+} y_0(t)$$

Qu'est-ce que cela impliquerait pour $\lim_{t \rightarrow T_+, t < T_+} y_0'(t)$? En déduire que $I = \mathbb{R}$.

Réponse : Comme f vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard sur le pavé $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le théorème d'explosion des solutions, dans le cas où $\dim(E) < +\infty$ (ici $E = \mathbb{R}$), donne comme possibilités

▷ $\sup I < +\infty$, et $\lim_{t \rightarrow T_+} |y_0(t)| = +\infty$

▷ $\sup I = +\infty$.

▷ Le domaine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas de bord dans la seconde variable y , donc pas de possibilité d'atteindre le bord du domaine dans la variable y .

Ainsi, si $T_+ = \sup I < +\infty$ alors $\lim_{t \rightarrow T_+, t < T_+} |y_0(t)| = +\infty$ et donc

$$\lim_{t \rightarrow T_+, t < T_+} y_0(t) = +\infty$$

puisque y_0 est positive.

Comme $y_0'(t) = ty_0(t)e^{-(ty_0(t))^2}$, alors on aurait $\lim_{t \rightarrow T_+, t < T_+} y_0'(t) = 0$, ce qui est impossible car on ne peut avoir une asymptote verticale pour $y(\cdot)$ en T_+ et sa dérivée qui tend vers 0 en T_+ . On en déduit qu'il n'est pas possible d'avoir $T_+ < \infty$. Donc, $T_+ = +\infty$. Comme y_0 est une fonction paire, cela implique que $I = \mathbb{R}$. \square

(6) Ecrire l'équation intégrale associée au problème de Cauchy.

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |y(t_n) - y(t_m)| = 0.$$

En déduire que y admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

Réponse : L'équation intégrale associée au problème de Cauchy (4) est

$$y_0(t) = y_0(0) + \int_0^t ty_0(t)e^{-(ty_0(t))^2} dt$$

Comme $y_0(t) \geq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $T_0 > 1$ tel que pour tout $t > T_0$,

$$ty_0(t)e^{-(ty_0(t))^2} = \underbrace{ty_0(t)e^{-\frac{1}{2}(ty_0(t))^2}}_{\leq 1 \text{ pour } t > T_0} e^{-\frac{1}{2}(ty_0(t))^2} \quad (6)$$

Donc, pour tout $T_0 < t_n < t_m$, on a

$$\begin{aligned} |y_0(t_n) - y_0(t_m)| &= \left| \int_{t_n}^{t_m} ty_0(t)e^{-(ty_0(t))^2} dt \right| \leq \int_{t_n}^{t_m} |ty_0(t)e^{-(ty_0(t))^2}| dt \\ &\leq \int_{t_n}^{t_m} e^{-\frac{1}{2}(ty_0(t))^2} dt \quad (\text{d'après (6)}) \\ &\leq \int_{t_n}^{t_m} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (\text{puisque } y_0(t) \geq 1) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{t_n, t_m \rightarrow \infty} |y_0(t_n) - y_0(t_m)| = 0$, puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ est convergente. Cela implique que la suite $(y(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, et donc convergente puisque \mathbb{R} est complet. Par le critère séquentiel, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existe et est finie. Ceci implique que y admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Par parité, elle admet la même asymptote horizontale en $-\infty$. \square

On pouvait obtenir le même résultat en utilisant que y est croissante, donc sa limite quand $t \rightarrow +\infty$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et l'équation intégrale, avec des arguments similaires à ceux qui précèdent montre que y est majorée, donc la limite existe et est finie.