

Exercices complémentaires au paragraphe III.

**Exercice 0.1.** On considère la relation  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$x f y \Leftrightarrow y = \ln(2x + 1) .$$

- i) Montrer que  $f$  est une fonction. (on note alors  $y = f(x) = \ln(2x + 1)$ . Donner son domaine de définition.
- ii) Est-ce que  $f$  est une application ?
- iii) Calculer  $f^{-1}(\{3\})$ .
- iv) Déterminer (sans preuve)  $f([0, 2])$ ,  $f(]0, 4[)$ ,  $f^{-1}([-1, 0])$  et  $f^{-1}(] - 1, 0[)$ .
- v)  $f$  est elle injective de  $\mathcal{D}(f)$  dans  $\mathbb{R}$  ? surjective de  $\mathcal{D}(f)$  dans  $\mathbb{R}$  ?

**Eléments de réponse.**

- i)  $\mathcal{D}(f) = ] - \frac{1}{2}, +\infty[$ .
- ii) Non.
- iii)  $f^{-1}(\{3\}) = \{\frac{e^3-1}{2}\}$ .
- iv) On a  $f([0, 2]) = [0, \ln(5)]$ ,  $f(]0, 4[) = ]0, \ln(9)[$ ,  $f^{-1}([-1, 0]) = [\frac{e^{-1}-1}{2}, 0]$  et  $f^{-1}(] - 1, 0[) = ]\frac{e^{-1}-1}{2}, 0[$ .
- v) L'application  $f$  de  $\mathcal{D}(f)$  dans  $\mathbb{R}$  est injective et surjective (la preuve reste à faire).

**Exercice 0.2.** Soit  $f$  la relation de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$x f y \Leftrightarrow y^2 = x .$$

Montrer que  $f$  n'est pas une fonction.

**Réponse.** On montre par exemple que  $x = 1$  admet deux images 1 et  $-1$  par  $f$ .

**Exercice 0.3.** Soit  $f$  la relation de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$x f y \Leftrightarrow y = e^{2x} - 2e^x .$$

- i) Cette relation est-elle une fonction (si oui, donner son domaine). Est-ce une application ?
- ii) Quels sont les antécédents de 0 par  $f$  ? Déterminer  $f^{-1}(]0, +\infty[)$ .

**Eléments de réponse**

- i) C'est une fonction. C'est une application.
- ii) Le seul antécédent de 0 par  $f$  est  $\ln(2)$ . On trouve  $f^{-1}(]0, +\infty[) = ]\ln(2), +\infty[$ .

**Exercice 0.4.** Soit les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{2x-1}{x+3}, \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{|x+1|}$$

Pour chacune de ces fonctions donner leur domaine de définition et dire s'il s'agit d'une application. Dire celles qui sont injectives, surjectives, bijectives.

Déterminer  $f^{-1}([0, 1])$ ,  $g^{-1}([0, 1])$  et  $h^{-1}([1, +\infty[)$ .