Dans la suite, si nécessaire, on utilisera (sans les redémontrer), les développements limités usuels en 0 à l'ordre n suivants:

$$\begin{array}{lcl}
(1+x)^\alpha & = & 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+...+\alpha(\alpha-1)\times\cdots\times(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+x^n\epsilon(x)\ , \\
\frac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+x^3+...+x^n+x^n\epsilon(x)\ , \\
\mathrm{e}^x & = & 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\epsilon(x)\ , \\
\sin(x) & = & x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+x^n\epsilon(x)\ , \\
\cos(x) & = & 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+x^n\epsilon(x)\ , \\
\ln(1+x) & = & x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+x^n\epsilon(x)\ .
\end{array}$$

Exercice 1. Donner le développement limité à l'ordre 4 en $x_0=0$ des fonctions $\sin(-x)$, e^{-x} et $\ln(1-x)$.

Exercice 2. Par le calcul, montrer que les développements limités en 0 à l'ordre 3 de $\arcsin x$ et $\arccos x$ sont

$$\begin{array}{lcl}
\arcsin x & = & x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+x^3\epsilon(x)\ , \\
\arccos x & = & \frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+x^2\epsilon(x)\ .
\end{array}$$

Exercice 3. En utilisant les propriétés sur la somme, le produit ou le quotient de deux développements limités, montrer les d.l. en 0 suivants

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{sh}x & = & x+\frac{x^3}{6}+x^4\epsilon(x)\ , \\
\mathrm{ch}x & = & 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\epsilon(x)\ , \\
\tan x & = & x+\frac{x^3}{3}+x^4\epsilon(x)\ .
\end{array}$$

Exercice 4. En utilisant la propriété sur la composition des développements limités, montrer le d.l. en $x_0=0$ à l'ordre 4 suivant

$$\mathrm{e}^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+x^4\epsilon(x)\ .$$

Exercice 5. [Extrait de **Algèbre et Analyse**, Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, *S. Balac & F. Sturm*, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 2003]
Calculer le d.l. au voisinage de 0 de

$$\begin{array}{ll}
\sin x\cos(2x) & \textit{à l'ordre 6,} \\
\cos(x)\ln(1+x) & \textit{à l'ordre 4,} \\
(x^3+1)\sqrt{1-x} & \textit{à l'ordre 3,} \\
\dfrac{\sin x-1}{\cos(x)+1} & \textit{à l'ordre 2,} \\
\dfrac{1}{\sin x}\ln(1+x) & \textit{à l'ordre 3,} \\
\mathrm{e}^{\arcsin x} & \textit{à l'ordre 3,} \\
(1+\arctan x)^{x/\sin^2 x} & \textit{à l'ordre 2,} \\
x(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{x}} & \textit{à l'ordre 4.}
\end{array}$$