

**Correction du contrôle continu M11, session novembre 2007**

**Exercice 1.** (1) Le résultat suit de la comparaison des deux dernières colonnes de la table de vérité ci-dessous.

$P$	$Q$	$P$ et $Q$	non $P$	non $Q$	non( $P$ et $Q$ )	non( $P$ ) ou non( $Q$ ).
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

(2) Le résultat suit de la comparaison des deux dernières colonnes de la table de vérité ci-dessous.

$P$	$Q$	$P$ ou $Q$	non $P$	non $Q$	non( $P$ ou $Q$ )	non( $P$ ) et non( $Q$ ).
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

(3) On a

$$x \in \complement_E(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \text{non}(x \in A \text{ ou } x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ \Leftrightarrow x \in \complement_E(A) \text{ et } x \in \complement_E(B) \Leftrightarrow x \in \complement_E(A) \cap \complement_E(B).$$

(4) On a de même

$$x \in \complement_E(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \text{non}(x \in A \text{ et } x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ \Leftrightarrow x \in \complement_E(A) \text{ ou } x \in \complement_E(B) \Leftrightarrow x \in \complement_E(A) \cup \complement_E(B).$$

**Exercice 2.** Effectuons d'abord la discussion complète de la solvabilité de l'équation:

$$(A) \quad x^2 + 3x + 4 = y,$$

avec  $y \in \mathbb{R}$  étant un paramètre et  $x \in \mathbb{R}$  étant l'inconnue. Pour chaque  $y$ , il s'agit de résoudre l'équation du second degré avec le discriminant  $\Delta = 4y - 7$ .

On en déduit que

(i) Si  $\Delta < 0$ , c'est à dire si  $y < \frac{7}{4}$ , alors l'équation (A) n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

(ii) Si  $\Delta = 0$ , c'est à dire si  $y = \frac{7}{4}$ , alors l'équation (A) admet comme unique solution  $x = -\frac{3}{2}$ .

(iii) Si  $\Delta > 0$ , c'est à dire si  $y > \frac{7}{4}$ , alors l'équation (A) admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$ :

$$\frac{-3 + \sqrt{4y - 7}}{2} > -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3 - \sqrt{4y - 7}}{2} < -\frac{3}{2}.$$

On a donc

(1) Si  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = \mathbb{R}$ , on déduit de (i) que  $f$  n'est pas surjective et de (iii) que  $f$  n'est pas injective.

(2) Si  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = [\frac{7}{4}, +\infty[$ , on déduit de (ii) et (iii) que  $f$  est surjective.

(3) Si  $E = ]-\infty, -\frac{3}{2}]$ ,  $F = [\frac{7}{4}, +\infty[$ , on déduit de (ii) et (iii) que  $f$  est bijective et que

$$f^{-1} : F \rightarrow E, \quad f^{-1}(x) = \frac{-3 - \sqrt{4x - 7}}{2}.$$

(4) (a)

- $\mathcal{R}$  est réflexif car  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x)$ .
- $\mathcal{R}$  est symétrique car  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$ .
- $\mathcal{R}$  est transitif car

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left( f(x) = f(y) \text{ et } f(y) = f(z) \right) \Rightarrow \left( f(x) = f(z) \right).$$

(b) On a  $\text{cl}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}$ , donc  $\text{cl}(0) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(0)\}$ .

Comme

$$f(x) = f(0) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0,$$

on en déduit

$$\text{cl}(0) = \{-3, 0\}.$$

**Exercice 3.** (1) La racine  $\alpha \in \mathbb{R}$  satisfait l'équation  $\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^3 + i\alpha + \frac{1}{2}i = 0$ . En comparant les parties réelles et imaginaires dans cette égalité on trouve

$$\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^3 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \frac{1}{2} = 0 ,$$

d'où

$$\alpha = -\frac{1}{2} .$$

(2) On trouve  $Q$  en effectuant la division euclidienne de  $P$  par  $x + \frac{1}{2}$ :

$$\begin{array}{r|l} x^4 + \frac{1}{2}x^3 + ix + \frac{1}{2}i & x + \frac{1}{2} \\ \hline -(x^4 + \frac{1}{2}x^3) & x^3 + i \\ & ix + \frac{1}{2}i \\ & 0 \end{array}$$

(3) Les racines complexes de  $Q$  sont celles de l'équation

$$x^3 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} .$$

On trouve

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{i\frac{\pi}{2}} = i , \\ x_2 &= e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i , \\ x_3 &= e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i . \end{aligned}$$

(4) La factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  est donc

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - i)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) .$$