

Correction exam 2007 - Méthodologie Maths (filière Info et Mathématiques)
--

Exercice 1. i) Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes. Dans chaque cas déterminer si l'assertion est vraie ou fausse.

$$(1) \exists R \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = R^2.$$

$$(2) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists R \in \mathbb{R}_+, x^2 + y^2 = R^2.$$

ii) Ecrire la négation de

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in \mathbb{R}, (|h| < \delta \Rightarrow |\sin(h)| < \epsilon).$$

Réponse.

i) Négation de (1):

$$\forall R \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq R^2.$$

Cette négation est vraie car pour R quelconque dans \mathbb{R}_+ , pour $x = R$ et $y = 1$, on a bien $x^2 + y^2 = R^2 + 1 \neq R^2$. Cela signifie que l'assertion initiale est fausse.

Négation de (2):

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall R \in \mathbb{R}_+, x^2 + y^2 \neq R^2.$$

Cette assertion est fausse. Pour le montrer, on montre que sa négation (qui est l'assertion (2)) est vraie.

(2) est vraie car pour x et y quelconque dans \mathbb{R} , il suffit de prendre $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour avoir $x^2 + y^2 = R^2$. (R est tout simplement le rayon du cercle de centre l'origine $(0,0)$, passant par le point (x,y)).

ii) La négation de l'assertion est

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists h \in \mathbb{R}, (|h| < \delta \text{ et } |\sin(h)| \geq \epsilon)$$

Exercice 2. i) Expliquer le principe d'un raisonnement par contraposée.

ii) Montrer que l'assertion suivante est vraie (n désigne un nombre entier):

$$n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair.}$$

Est-ce que la réciproque est vraie? (justifier rigoureusement votre réponse)

Réponse.

i) Le principe d'un raisonnement par contraposée est basé sur l'équivalence logique

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$

Ainsi, pour démontrer qu'une implication " P implique Q " est vraie, on montre que l'implication " $\text{non}(Q)$ implique $\text{non}(P)$ " est vraie.

ii) On note $P = "n^2 \text{ impair}"$ et $Q = "n \text{ impair}"$. Pour montrer que P implique Q , on va utiliser un raisonnement par contraposée.

On suppose $\text{non}(Q)$ vrai, c'est à dire Q faux:

$$\begin{aligned} Q \text{ faux} &\Rightarrow n \text{ pair} \Rightarrow n = 2k \text{ (pour un certain } k \in \mathbb{N} \text{)} \\ &\Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2) \\ &\Rightarrow n^2 \text{ est pair} \Rightarrow P \text{ est faux} \Rightarrow \text{non}(P) \text{ est vrai,} \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

¹Jean-Marie Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr

La réciproque est vraie:

$$\begin{aligned} Q \text{ vrai} &\Rightarrow n \text{ impair} \Rightarrow n = 2k + 1 \text{ (pour un certain } k \in \mathbb{N}) \\ &\Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + k) + 1 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ est impair} \Rightarrow P \text{ est vrai.} \end{aligned}$$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n, \quad \text{avec } 0! = 1$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^n k k! = (n + 1)! - 1.$$

Réponse. On effectue une preuve par récurrence.

On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n k k! = (n + 1)! - 1.$$

- Pour $n = 1$, on a bien:

$$1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = (1 + 1)! - 1,$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k k! &= \left(\sum_{k=1}^n k k! \right) + (n + 1)(n + 1)! = (n + 1)! - 1 + (n + 1)(n + 1)! \\ &= (n + 1)!(1 + n + 1) - 1 = (n + 1)!(n + 2) - 1 = (n + 2)! - 1. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie .

Ceci termine la preuve par récurrence.