Correction de l'examen de M11 de 2006-07

Problème I.

1) Le domaine de définition de la fonction ln est $]0, +\infty[$. La fonction valeur absolue $|\,.\,|$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $[0, +\infty[$; donc, par composition, on en déduit que la fonction $\ln|x|$ est définie en tout point x tel que $|x| > 0$, c'est à dire sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ceci permet de conclure que la fonction $g(x) = x - 1 - \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (on verra avec la question 2) que cette fonction n'est pas prolongeable par continuité en 0).

Le domaine de continuité de g est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et le domaine de dérivabilité est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La fonction g n'est ni paire ni impaire. Pour le montrer, il suffit de constater par exemple que $g(1) = 0$ et $g(-1) = -2$.

On calcule la dérivée de g en tout point $x \neq 0$.

- Si $x < 0$, on a $g(x) = x - 1 - \ln(-x)$, donc $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.
- si $x > 0$, on a $g(x) = x - 1 - \ln(x)$, donc $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Donc, pour tout $x \neq 0$ on obtient

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \ .$$

2).

Quand x tends vers 0, $|x|$ tend vers 0^+, et donc

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x - 1 - \ln(x) = +\infty \ .$$

(en particulier, on en déduit que g n'est pas prolongeable par continuité en 0).

On a aussi, en utilisant les rappels sur les limites donnés dans l'énoncé :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 - \ln(x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - x^{-1}\ln(x)\right) = +\infty \ ,$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x - 1 - \ln(-x) = -\infty \ .$$

3) $g'(x) > 0$ si et seulement si $1 - \frac{1}{x} > 0$, si et seulement si $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. On obtient donc le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) La fonction g est *continue* sur l'intervalle $[-0.3, -0.2]$, $g(-0.3) < 0$ et $g(-0.2) > 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (voir énoncé dans le cours), il existe $a \in]-0.3, -0.2[$, tel que $g(a) = 0$.

La fonction g étant *strictement croissante* sur l'intervalle $]-0.3, -0.2[$ (en plus d'être continue), on en déduit que la valeur a est unique, car la fonction g est bijective de $]-0.3, -0.2[$ vers $]g(-0.3), g(-0.2)[$.

5) D'après les questions 3) et 4), on en déduit que $g(x)$ est strictement positive quand $x \in]a, 1[\cup]1, +\infty[$, et g est strictement négative quand $x \in]-\infty, a[$. La fonction g s'annule aux points a et 1.

6) En utilisant les propriétes générales sur les domaines de définition de la somme, du produit, du quotient et de la composition de fonctions, on obtient aisément que la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. [On verra avec les questions 7) et 8) que f qui n'est a priori pas définie pour $x = 0$ et $x = 1$, peut se prolonger par continuité en $x = 0$ et en $x = 1$.]

la fonction f est continue et dérivable aussi sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

En notant (voir calcul de la dérivée de g à la question 1)) que la dérivée de $\ln|x|$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est $\frac{1}{x}$, on en déduit pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$f'(x) = \frac{(x-1)(\ln|x| + x\frac{1}{x}) - x\ln|x|}{(x-1)^2} = \frac{x - \ln|x| - 1}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2} \ .$$

Ceci permet d'établir que f' est du même signe que g.

D'après ce qui précède, on obtient

x	$-\infty$		a		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{a\ln\|a\|}{a+1}<0$	$\nearrow$	||	$\nearrow$	||	$\nearrow$	$+\infty$

7) Puisque $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, on obtient

$$\lim_{x\to 0,\, x\neq 0} f(x) = 0.$$

8) La fonction $\ln(1+u)$ est définie, deux fois dérivable et de deuxième dérivée continue au voisinage de 0. On peut donc écrire la formule de Taylor en $u=0$ à l'ordre 2 pour $\ln(1+u)$.

On a $(\ln(1+u))' = \frac{1}{1+u}$ et $(\ln(1+u))'' = -\frac{1}{(1+u)^2}$. Ceci implique le d.l. en $u=0$ suivant:

$$\ln(1+u) = \ln(1) + 1\times\frac{u}{1!} + (-1)\times\frac{u^2}{2!} + u^2\epsilon(u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon(u)\ .$$

On va maintenant écrire le développement limité en $x=1$ de f. Comme on écrit un d.l. en $x=1$, on peut remplacer $|x|$ par x, car on est au voisinage de 1, donc, x reste positif. Ensuite, on remplace dans $\ln(x)$ l'expression x par $1+(x-1)$. Ainsi, au voisinage de $x=1$ on a $x-1$ qui est au voisinage de 0, et

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\ln(1+(x-1))}{x-1} \\ &= \frac{x\left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\epsilon(x-1)\right)}{(x-1)} \\ &= x\left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\epsilon(x-1)\right) \end{aligned}$$

où on a utilisé, dans la deuxième égalité, le d.l. de $\ln(1+u)$ en $u=0$, et dans la dernière égalité, on a simplifié par $(x-1)$. On a ainsi obtenu un d.l. de f à l'ordre 1 en $x=1$.

On a alors

$$\lim_{x\to 1, x\neq 1} f(x) = \lim_{x\to 1, x\neq 1} x\left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\epsilon(x-1)\right) = 1$$

9) Les résultats obtenus aux questions 7) et 8) montrent que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en $x=0$ en posant $f(0) = \lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = 0$, et en $x=1$ en posant $f(1) = \lim_{x\to 1, x\neq 1} f(x) = 1$. La fonction ainsi définie est notée h. On en déduit alors que le domaine de définition de h est $\mathbb{R}$, et que h est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant étudier la dérivabilité de h. Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, on obtient immédiatement que h est dérivable en tout point $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Etudions la dérivabilité en $x=0$ et $x=1$ de la foncion h.

Etude de la dérivabilité en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\ln|x|}{x-1} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{x-1} = -\infty\ ,$$

Donc h n'est pas dérivable en $x=0$ (h n'admet pas non plus une dérivée à gauche en 0 et une dérivée à droite en 0).

Etude de la dérivabilité en $x=1$:

On utilise le d.l. en $x=1$ de f obtenu précédemment.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x\left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\epsilon(x-1)\right) - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x - 1 - x\frac{(x-1)}{2} + x(x-1)\epsilon(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(1 - x\times\frac{1}{2} + x\epsilon(x-1)\right) = \frac{1}{2}\ , \end{aligned}$$

Donc h est dérivable en $x=1$ et $h'(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice II. 1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + a + 1}{a} - \frac{u_{n-1} + a + 1}{a} = \frac{u_n - u_{n-1}}{a} = \frac{v_{n-1}}{a}\ .$$

On en déduit que la suite $(v_n)_n$ est constante lorsque $a = 1$.
2) D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{1}{a} \ ,$$

donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $r = 1/a$.
3) Puisque $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $r = 1/a$, on en déduit

$$v_n = \frac{1}{a} v_{n-1} = (\frac{1}{a})^2 v_{n-2} = \cdots = (\frac{1}{a})^n v_0 \ .$$

(vrai aussi pour $a = 1$). Comme $v_0 = u_1 - u_0 = \frac{1+a+1}{a} - 1 = \frac{2}{a}$, on obtient

$$v_n = 2(\frac{1}{a})^{n+1} \ .$$

On sait (et on peut le redémontrer par récurrence sur n) que la somme des n premiers termes de la suite géométrique $(v_n)_n$ de raison $r = 1/a$ est donnée par:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \frac{1 - r^n}{1 - r} \ ,$$

ce qui implique

$$S_n = \frac{2}{a} \frac{1 - (1/a)^n}{1 - (1/a)} = 2 \frac{a^n - 1}{a^n (a - 1)} \ ,$$

où pour obtenir la dernière égalité, on a multiplié le dénominateur et le numérateur par a^n.
4)
- Si $a \in]0, 1[$: on a $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = +\infty$, donc

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 \frac{-1}{a^n(a-1)} = 2 \frac{-1}{a-1} \lim_{n\to\infty} a^{-n} = +\infty \ .$$

- Si $a > 1$: on a $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$, donc

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 \frac{a^n}{a^n(a-1)} = \frac{2}{a-1} \ .$$

- Si $a = 1$: on a vu que $(v_n)_n$ est une suite constante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n =_{n\to+\infty} n v_0 = +\infty \ .$$

5) On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0,$$

donc $S_n + u_0 = S_n + 1 = u_n$. On en déduit, à l'aide de la question précédente:

$$\begin{array}{ll} \text{si } a \in]0, 1], & \lim_n u_n = +\infty \ , \\ \text{si } a > 1, & \lim_n u_n = \frac{2}{a-1} + 1 = \frac{a+1}{a-1} \ . \end{array}$$

Exercice III. 1) On a

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 \times x}{x-1}} = x \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}} = x \left(\frac{x-1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} = x \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

2) Le d.l. en $u = 0$ à l'ordre 2 de $(1 + u)^\alpha$ $(\alpha \neq 1)$ est: $(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + \alpha(\alpha - 1)\frac{u^2}{2} + u^2 \epsilon(u)$, donc $(1 - u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + u^2 \epsilon(u)$.

Quand x tend vers plus ou moins l'infini, $u = \frac{1}{x}$ tend vers 0 et on a le d.l. en suivant (valable en $+\infty$ et $-\infty$)

$$f(x) = x \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} = x \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{3}{8}(\frac{1}{x})^2 + (\frac{1}{x})^2 \epsilon(\frac{1}{x}) \right) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\epsilon(\frac{1}{x}) \ .$$

On en déduit que $f(x)$ admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique d'équation $x + \frac{1}{2}$, et que f est au dessous de l'asymptote en $-\infty$ et au dessus en $+\infty$, car

$$f(x) - (x + \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\epsilon(\frac{1}{x}) \ ,$$

et $\frac{3}{8}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\epsilon(\frac{1}{x})$ est du signe $\frac{3}{8}\frac{1}{x}$ (et donc de x), en l'infini.