

Problème I. 1) la fonction $1/x$ est définie et continue sur \mathbb{R}^* . En composant par la fonction exponentielle qui est définie et continue sur \mathbb{R} , on en déduit que la fonction $e^{1/x}$ est définie et continue sur \mathbb{R}^* . De même, la fonction $1 + e^{1/x}$ est définie et continue sur \mathbb{R}^* . La fonction f , qui est le quotient de x par $1 + e^{1/x}$ est alors définie et continue sur \mathbb{R}^* sauf en les points où le dénominateur s'anule. Comme $1 + e^{1/x} > 0$, quel que soit x dans \mathbb{R} , le dénominateur ne s'anule jamais. On en conclut que f est définie et continue sur \mathbb{R}^* .

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; on en déduit $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$. Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = 0.$$

De même, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = 0.$$

La limite à gauche en 0 de f est égale à la limite à droite en 0 de f . On peut donc prolonger f par continuité en zéro en posant

$$f(0) = 0.$$

2) Avec les mêmes arguments qu'à la question 1), en utilisant aussi les propriétés générales sur le quotient et la composition des fonctions, on montre que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Etudions la dérivabilité en 0. Pour cela, on va étudier la limite en 0 de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1.$$

Cela montre que f n'est pas dérivable en 0.

La fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R}^* . Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{(1 + e^{1/x}) - x(-\frac{1}{x^2})e^{1/x}}{(1 + e^{1/x})^2} = \frac{1 + e^{1/x} + \frac{1}{x}e^{1/x}}{(1 + e^{1/x})^2}$$

L'équation de la droite tangente à la courbe de f en $x = 1$, est de la forme $y = ax + b$, où l'on doit déterminer le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b . On sait que le coefficient directeur est $a = f'(1)$, i.e., $a = \frac{1+2e}{(1+e)^2}$.

Pour déterminer l'ordonnée à l'origine b , on sait que le point de coordonnées $(1, f(1)) = (1, 1/(1+e))$ est sur la droite. On en déduit pour b l'équation

$$\frac{1}{1+e} = \frac{1+2e}{(1+e)^2} \times 1 + b,$$

ce qui donne

$$b = \frac{1}{1+e} - \frac{1+2e}{(1+e)^2} = -\frac{e}{(1+e)^2}.$$

L'équation de la tangente à f en 1 est donc

$$y = \frac{1+2e}{(1+e)^2} x - \frac{e}{(1+e)^2}.$$

3) On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = 1$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = +\infty.$$

4) La fonction e^u est deux fois dérivable, de deuxième dérivée continue. On peut donc appliquer la formule de Taylor. Puisque $(e^u)' = (e^u)'' = e^u$, on obtient

$$e^u = e^0 + ue^0 + \frac{u^2}{2!}e^0 + u^2\epsilon(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon(u).$$

Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $1/(1+e^u)$ est obtenu en effectuant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de 1 par $1 + (1 + u + \frac{u^2}{2}) = 2 + u + \frac{u^2}{2}$. On obtient

$$\frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}u + u^2\epsilon(u).$$

(dans la partie principale de ce développement, le terme de degré 2 est nul)

En utilisant ce résultat et le fait que lorsque x tends vers $+\infty$, $u = 1/x$ tends vers 0, on en déduit le développement asymptotique en $+\infty$ de $f(x)/x$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x^2} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

Le développement asymptotique en $-\infty$ de $f(x)/x$ est identique.

Cela nous permet d'affirmer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe du terme (non nul) suivant le terme d'ordre 1 en $1/x$ dans le développement asymptotique de $f(x)/x$. Comme le terme d'ordre 2 dans le développement ci-dessus est nul, il nous faut calculer le terme d'ordre 3. En procédant comme ci-dessus, on obtient:

$$\frac{1}{1 + e^u} = \frac{1}{2 + u + u^2/2 + u^3/6 + u^3\epsilon(u)} = \frac{1}{2} - \frac{u}{4} + \frac{u^3}{48} + u^3\epsilon(u).$$

Ceci permet d'écrire, en posant à nouveau $u = 1/x$ ($x \rightarrow \pm\infty$), le développement asymptotique

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{48x^3} + \frac{1}{x^3} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ceci implique

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{48x^2} + \frac{1}{x^2} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

donc, l'asymptote d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est située en dessous de la courbe de f (en $-\infty$ et en $+\infty$), car le terme $1/48x^2$ est toujours positif.

5) La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^* et

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} - \frac{1}{x^2}e^{1/x} + \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x} = -\left(2 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} e^{1/x}.$$

Donc, $g'(x) > 0$ si et seulement si $2 + \frac{1}{x} < 0$, si et seulement si $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$. On obtient donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	+	-	-
$g(x)$	2		1	$+\infty$
		$(1 - e^{-2}) > 0$		2
$f'(x)$	+	+	+	+

Pour déterminer le signe de f' , on a utilisé l'égalité, $f'(x) = g(x)/(1 + e^{1/x})^2$, vraie sur \mathbb{R}^* . On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} (la croissance est sur \mathbb{R} entier, et pas par morceaux, car la fonction f est continue sur \mathbb{R} et il ne peut donc pas y avoir de discontinuité aux points $-1/2$ et 0).

6) La fonction f étant strictement croissante et continue sur \mathbb{R} , nous pouvons en conclure, en utilisant le théorème de la bijection, qu'elle est bijective de \mathbb{R} dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice II. 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(3u_n - u_{n-1}) - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}).$$

Montrons par récurrence sur n que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $b - a$.

• La propriété est vraie pour $n = 1$ puisque

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{2}(3u_1 - u_0) - u_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_0) = \frac{1}{2}(b - a).$$

• Supposons la propriété vraie pour n non nul fixé, i.e., supposons que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $b - a$. Alors, $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$ est du signe de $u_{n+1} - u_n$, et donc est du signe de $b - a$; ceci démontre la propriété pour $n + 1$, et termine donc la démonstration par récurrence.

Lorsque $a = b$, on a alors $u_{n+1} - u_n$ qui est toujours du signe de $b - a = 0$, donc, est à la fois positif et négatif; on en déduit que $u_{n+1} - u_n$ est toujours nul, c'est à dire, $u_{n+1} = u_n$. La suite est alors stationnaire. Lorsque $b > a$, $u_{n+1} - u_n$ est toujours du signe de $b - a > 0$, donc la suite est strictement croissante. Enfin, pour $b < a$, on en déduit de même que la suite est strictement décroissante.

2)i) L'égalité (1) est valable pour toute valeur de n non nulle. En la réitérant, nous obtenons:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}(u_{n-1} - u_{n-2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2(u_{n-2} - u_{n-3}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3(u_{n-3} - u_{n-4}) = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(u_1 - u_0),$$

c'est à dire

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a) = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

2)ii) De l'égalité précédente et de l'identité

$$u_n - u_0 = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) ,$$

on déduit l'égalité

$$u_n - u_0 = \sum_{k=1}^n -\frac{1}{2^{k-1}} = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = -\left(\frac{1}{2}\right)^0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = -2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) ,$$

et donc

$$u_n = -2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + u_0 = -2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 2 = 2\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Exercice III. 1) On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty , P(-1) = -1, P(0) = 1, P(1) = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty ,$$

2) Théorème des valeurs intermédiaires: Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie et continue sur un intervalle I . Soient a et b deux réels dans I , tels que $a < b$. Alors, pour tout réel m dans $[f(a), f(b)]$, il existe au moins un réel x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = m$.

Comme P est continue (puisque'il s'agit d'une fonction polynomiale), et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$, il existe $x_- < -1$, tel que $P(x_-) > 0$. De même on montre qu'il existe $x_+ > 1$ tel que $P(x_+) > 0$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction P continue sur $I = \mathbb{R}$, avec $a_1 = x_-$ et $b_1 = -1$, puisque $P(a_1) > 0$ et $P(b_1) < 0$, il existe $m_1 \in [a_1, b_1]$ tel que $P(m_1) = 0$ (Notez que $m_1 \neq a_1$ et $m_1 \neq b_1$, puisque $P(a_1) > 0$ et $P(b_1) < 0$).

On applique à nouveau le théorème des valeurs intermédiaires avec $a_2 = -1$ et $b_2 = 0$, puis avec $a_3 = 0$ et $b_3 = 1$ et enfin avec $a_4 = 1$ et $b_4 = x_+$, ce qui permet d'obtenir trois valeurs $m_2 \in]a_2, b_2[$, $m_3 \in]a_3, b_3[$, et $m_4 \in]a_4, b_4[$ telles que $P(m_2) = P(m_3) = P(m_4) = 0$. Les valeurs m_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sont deux à deux distinctes puisque les intervalles $]a_i, b_i[$ sont deux à deux disjoints.

On a ainsi trouvé quatre racines distinctes pour P . Comme de plus le polynôme P est de degré quatre à coefficients dans \mathbb{R} , il admet au plus quatre racines. Ceci termine la preuve de l'existence d'exactly quatre racines réelles pour P .

Exercice IV. 1) Soit $g(x)$ la fonction tangente restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et à valeurs dans \mathbb{R} . La fonction $\arctan(x)$ est la fonction réciproque de la fonction g . Ainsi, pour tout x dans \mathbb{R} , $\arctan(x)$ est défini comme l'unique réel $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \tan(y)$. La fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} , et

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2} .$$

[pour retrouver la valeur de la dérivée de \arctan on peut utiliser l'égalité $(\arctan(x))' = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$, et le fait que $g'(x) = \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$]

2) La fonction \tan est deux fois dérivable et à dérivée continue sur \mathbb{R} . On peut alors appliquer la formule de Taylor pour déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de \arctan . On a $\arctan(0) = 0$, $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$, $\arctan'(0) = 1$, $\arctan''(x) = -2x/(1+x^2)^2$ et $\arctan''(0) = 0$. Donc

$$\arctan(x) = \left(\sum_{k=0}^2 \frac{\arctan^{(k)}(0)}{k!} x^k\right) + x^2 \epsilon(x) = x + x^2 \epsilon(x) .$$

[On pouvait aussi utiliser le fait que \arctan est impaire pour montrer que la partie principale du développement limité est impaire]

Pour calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $1/(1 - \arctan(x))$, il suffit par exemple d'effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 2, de 1 par $1 - x$, car $1 - x$ est la partie principale de $1 - \arctan x$ (on aurait aussi pu utiliser le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $1/(1 - u) = 1 + u + u^2 + u\epsilon(u)$, et utiliser le théorème sur la composition de deux développements limités. Le résultat obtenu est alors, bien évidemment le même). On obtient

$$\frac{1}{1 - \arctan(x)} = 1 + x + x^2 + x^2 \epsilon(x) .$$