Correction de l'épreuve de mathématiques (M11) de Janvier 2006

Exercice 1

1) on fait un raisonnement par récurrence : supposons $u_n \geq 4$. Alors $5u_n \geq 20$ et donc

$$u_{n+1} = \sqrt{5u_n} \geq \sqrt{20} = 4$$

Comme $u_0 = 4$, on a donc $u_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Pour connaître le signe de $u_{n+1} - u_n$, il suffit de connaître le signe de $u_{n+1}^2 - u_n^2$ car la suite (u_n) est positive. Or

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 5u_n - u_n^2 = u_n \ (5 - u_n)$$

Comme dans la question 1), on montre facilement par récurrence que $u_n \leq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (on a même

$u_n < 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

On a donc $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$ d'où $u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(u_n)_n$ est donc croissante.

3) $(u_n)_n$ est croissante et majorée donc elle est convergente. Soit l sa limite. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1}^2 = 5u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$l^2 = 5l, \text{ c.à.d, } l(l-5) = 0 \quad (1)$$

Comme $u_n \geq 4 \quad \forall n$, on a $l \geq 4$ de sorte que

$(1) \Longrightarrow l = 5.$

4) Une suite croissante et majorée converge vers le sup de ses valeurs. Par conséquent :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = 5.$$

Exercice 2

1) $g(t) = \sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + t\,\varepsilon(t)$

2) On a $f(x) = x+1-\sqrt{1+x^2} = x+1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

$= x+1-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

D'après 1) avec $t = \frac{1}{x^2}$ ($t \to 0$ qd $x \to \infty$), on a :

$$f(x) = x+1-|x|\left(1+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Donc au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ s'écrit :

$$f(x) = x+1-x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc il y a une asymptote horizontale d'équation

$y = 1$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$

De plus, comme le signe de $-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ est celui de $-\frac{1}{2x}$, on voit que $f(x)-1<0$ au voisinage de $+\infty$, c'est à dire la courbe se situe au dessous de l'asymptote.

De même, au voisinage de $-\infty$, $f(x)$ s'écrit :

$$f(x) = 2x+1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = 2x+1$, et comme $\frac{1}{2x} < 0$ pour $x \to -\infty$, la courbe est au dessous de cette asymptote.

Corrigé du Problème

1) $f(x) = e^x + x + 1$ est continue comme somme de fonctions continues. On a $f(-2) \simeq 0{,}14 - 2 + 1 = -0{,}86$

et $f(-1) \simeq 0.37 - 1 + 1 = 0{,}37$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins un réel $a \in]-2, -1[$ tel que $f(a) = 0$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a donc $f'(x) \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ car $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) S'il existait $b \neq a$ tel que $f(b) = 0$ on aurait $f(a) = f(b)$ et comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées et on aurait donc l'existence d'un point $c \in (a, b)$ ou (b, a) tel que $f'(c) = 0$, ce qui contredit

$$f'(x) \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

4) On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Par conséquent : $f(x) < 0$ $\forall x \in]-\infty, a[$

et $f(x) > 0$ $\forall x \in]a, +\infty[$

5) Comme $1+e^{-x} > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x}{1+e^{-x}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction g n'est ni paire, ni impaire.

6) On a $e^{-x} = 1 - x + x\varepsilon(x)$ au voisinage de zéro.
En divisant suivant les puissances croissantes x par $1-x$, on obtient le développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de zéro :

$$g(x) = x + x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

7) On a $g(x) = \dfrac{x}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{e^{-x}}{x}}$ et donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = +\infty$.

8) $$g(x) - x = \frac{x}{1+e^{-x}} - x = \frac{x - x - xe^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-xe^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{-x}{1+e^{x}} = g(-x)$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} g(-x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

9) On a $g'(x) = \dfrac{1+e^{-x}+xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{x}+x+1}{e^{x}(1+e^{-x})^2}$

Le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur c'est-à-dire de $f(x)$.

10) on a donc le tableau de variation de g compte tenu du signe de f(x) étudié à la question 4)

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Sachant que la première bissectrice (la droite d'équation $y=x$) est asymptote à la courbe d'après la question 8), on obtient l'allure de la courbe :