Université de Toulon
L1 Sciences Économiques et Gestion - Année universitaire 2017/2018
Examen partiel
Durée: 2:00

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont **interdits**. On tiendra le plus grand compte de la présentation.

Question de cours. Pour un système de n équations linéaires à p inconnues, quelles sont les différentes possibilités pour le nombre de solutions du système (Theorème 1.6 du cours).
Théorème: Pour tout système linéaire de n équations à p inconnues, on a l'un des 3 cas suivants:

(1) Le système n'admet aucune solution
(2) Le système admet un p-uplet de solution et un seul
(3) Le système admet une infinité de p-uplets solutions.

Exercice 1. (5pts) Résoudre le système d'équations linéaires suivant *par la méthode du pivot de Gauss.*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x + 2z = -2 \end{cases}$$

Réponse:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 2 & \\ 2x & +y & +3z & = & 0 & L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ -x & & +2z & = & -2 & L_3 \to L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & 2 & \\ & -y & +z & = & -4 & \\ & y & +3z & = & 0 & L_3 \to L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & 2 & \\ & -y & +z & = & -4 & \\ & & 4z & = & -4 & L_3 \to L_3 + L_2 \end{cases}$$

On obtient avec la troisième équation $z = -1$. On reporte dans la deuxième, et on obtient $-y - 1 = -4$, ce qui donne $y = 3$. On reporte alors $z = -1$ et $y = 3$ dans la première équation pour obtenir $x + 3 - 1 = 2$, ce qui donne $x = 0$. L'ensemble des solutions est donc:

$$S = \{ (0, 3, -1) \}$$

Exercice 2. (5pts) Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer AB. Calculer A^t (la transposée de A).

Réponse:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 24 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{pmatrix},$$

2) Calculer $\det(B)$ et $\det(C)$. La matrice B est-elle inversible? La matrice C est-elle inversible?
Réponse: En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient:

$$\det(B) = (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \times (-6) - 0 \times (-7) + 1 \times (-6) = 0$$

La règle de Sarrus pour le calcul du déterminant de B donne (bien entendu!) le même résultat.
Comme $\det(B) = 0$, on en déduit que la matrice B n'est pas inversible.

On a

$$\det(C) = 1 \times 1 - (-1) \times (-\frac{2}{3}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Comme $\det(C) \neq 0$, on en déduit que la matrice C est inversible.

Exercice 3. (4pts)
1) Donnez les dérivées des fonctions suivantes (on ne précisera pas les domaines de définition et de dérivation, et on ne détaillera pas les calculs).

$$f_1(x) = \ln(x); \;\; f_2(x) = e^x(x^2 - 2x); \;\; f_3(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1};$$

Réponse:
$f_1'(x) = \frac{1}{x}$, $f_2'(x) = e^x(2x-2) + e^x(x^2-2x) = e^x(x^2-2)$, $f_3'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2-1)-(x^3-x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}$.
2) On rappelle que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction cosinus: $(\sin(x))' = \cos(x)$. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées $(f \circ g)'$ que vous rappellerez, calculez la dérivée de $\sin(x^3 - 2)$.
Réponse: On a $(f \circ g(x))' = g'(x)f'(g(x))$. On applique ce résultat à $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^3 - 2$, qui donnent $f'(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = 3x^2$, et donc

$$(\sin(x^3 - 2))' = (f \circ g(x))' = 3x^2 \cos(x^3 - 2)$$

3) Soit $h(x) = e^{xy} - y\ln(x)$. Calculer

$$\frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}$$

Réponse: On a

$$\frac{\partial h}{\partial x} = ye^{xy} - y \times \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = xe^{xy} - \ln(x)$$

Exercice 4. (6pts)
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

1) Donnez le domaine de définition de g.
Réponse: La fonction g est un polynôme dans les variables x et y, elle est donc définie sur $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^2$.

2) Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$.
Réponse: On a: $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 - 3x$.
3) Montrer que $(0,0)$ et $(1,1)$ sont les seuls points critiques.
Réponse: Un point (x,y) est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

On reporte $x = y^2$ dans la première équation. On obtient $y^4 = y$, donc $y^4 - y = 0$, ou encore $y(y^3 - 1) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul. Ainsi, $y(y^3 - 1) = 0$ implique $y = 0$ ou $y^3 = 1$, c'est à dire $y = 0$ ou $y = 1$. Pour chacune de ces deux valeurs, on reporte dans l'égalité $x = y^2$ et on obtient respectivement: $x = 0$ pour $y = 0$ et $x = 1$ pour $y = 1$. On a donc deux points critiques: $(0,0)$ et $(1,1)$.
4) Calculer la hessienne de g.
Réponse: On a

$$H(g) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

5) Déterminer la nature de deux points critiques $(0,0)$ et $(1,1)$.
Réponse: Pour le point $(0,0)$, on a

$$H(g)|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\Delta_2 = \det\big(H(g)|_{(0,0)}\big) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-3) \times (-3) = -9 < 0$, et donc $(0,0)$ est un point col.
Pour le point $(1,1)$, on a

$$H(g)|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

D'où $\Delta_2 = \det\big(H(g)|_{(1,1)}\big) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \times 6 - (-3) \times (-3) = 27 > 0$, et $\Delta_1 = 6 > 0$, donc $(1,1)$ est un minimum local.