Devoir Maison N$^o$2 - Licence MASS 2ème année.

**Exercice.** *Une compagnie aérienne donne des réservations sur le vol d'un appareil de 400 places. La probabilité qu'un passager ayant réservé pour ce vol ne se présente pas à l'embarquement est de* $0,08 = 8\%$.

***a)*** *Soit $X$ la variable aléatoire qui décrit le choix d'un passager, et qui vaut 1 si le passager en question se présente à l'embarquement et 0 si le passager se désiste. Quelle loi de probabilité est-il raisonnable d'associer à la variable aléatoire $X$ ? Donner le paramètre $p_0$ de cette loi. Calculer alors $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.*

**Réponse.** La variable aléatoire $X$ est une variable aléatoire réelle discrète, qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$. C'est donc une variable aléatoire de Bernouilli. Sa loi est entièrement déterminée par $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 0)$. On note $p_0 = \mathbb{P}(X = 1)$. D'après l'énoncé, on a

$$p_0 = 92\% = 0,92\,.$$

On a

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) \;+\; 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p_0\,,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) \;+\; 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) = p_0\,,$$

et

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p_0 - {p_0}^2 = p_0(1 - p_0)\,.$$

***b)*** *Si la compagnie accorde 420 réservations sur ce vol, quel est le risque de "surbooking", i.e., quelle est la probabilité que se présentent plus de passagers que les 400 qui pourront embarquer ? (On commencera par modéliser ce problème à l'aide d'une famille de variables aléatoires $X_i$, $i = 1, ..., 420$, indépendantes et de même loi, et dont on choisira la loi en s'aidant de la question a)).*

**Réponse.** Pour $i \in \mathbb{N}$, on appelle $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i$-ème passager se présente à l'embarquement, et qui vaut 0 sinon. On supposera que les variables aléatoires $X_i$ ont toutes la même loi de Bernouilli de paramètre $p_0$, et qu'elles sont mutuellement indépendantes.

La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ... + X_{420}$ représente le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement. La probabilité de surbooking est donc la probabilité de l'évènement :

$$A = \{S > 400\}\,.$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{420} X_i > 400\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{420} X_i - 420\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{420\,V(X_1)}} > \frac{400 - 420 \times 0,08}{\sqrt{420 \times 0,08 \times 0,92}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{420} X_i - 420\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{420\,V(X_1)}} > 2,45\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{420} X_i - 420\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{420\,V(X_1)}} \leq 2,45\right)\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Les variables aléatoires $X_i$ étant indépendantes et de même loi, et puisque $n = 420 \geq 30$, $np_0 \geq 10$ et $n(1 - p_0) \geq 10$, on peut, à l'aide du théorème de la limite centrale, approximer loi de $\frac{\sum_{i=1}^{420} X_i - 420\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{420\,V(X_1)}}$ par la loi normale centrée réduite. En utilisant les tables de la loi normale centrée réduite, on obtient alors l'approximation :

$$\mathbb{P}(A) \simeq 1 - 99,29\% = 0,71\%\,.$$

***c)*** *Quel est le nombre maximum de billet que doit vendre la compagnie pour être sûre à 99% que tous les passagers qui se présenteront à l'embarquement avec un billet aient une place dans l'avion ?*

**Réponse.** On cherche le plus grand entier $N$ tel que

$$P(\sum_{i=1}^{N} X_i \leq 400) \geq 99\% \,.$$

On cherche donc le plus grand $N$ tel que

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - N\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{NV(X_1)}} \leq \frac{400 - N \times 0,92}{\sqrt{N\,0,08 \times 0,92}}\right) \geq 99\% \,.$$

Comme dans la question précédente, on peut approximer la loi de $\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - N\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{NV(X_1)}}$ par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,\,1)$. Le nombre $N$ vérifie donc (approximativement) l'équation

$$\frac{400 - N \times 0,92}{\sqrt{N\,0,08 \times 0,92}} = 2,33 \,.$$

C'est à dire

$$0,92 \times N + 0,632 \times \sqrt{N} - 400 = 0 \,.$$

En résolvant cette équation du second degré dans la variable $x = \sqrt{N}$, on trouve a priori deux solutions

$$x = \frac{-0,632 \pm \sqrt{(0,632)^2 + 4 \times 400 \times 0,92}}{2 \times 0,92} \,.$$

On conserve seulement la solution positive

$$x = \frac{-0,632 + \sqrt{(0,632)^2 + 4 \times 400 \times 0,92}}{2 \times 0,92} \,,$$

et donc, en arrondissant à l'entier supérieur le plus proche la valeur de $x^2$, on obtient

$$N = x^2 \approx 421 \,.$$

On trouve une valeur très proche de celle utilisée dans la question b), ce qui est naturel compte tenu des résultats obtenus à la question b).