

Épreuve de Mathématiques (M11)

LICENCE DE SCIENCES - 1ÈRE ANNÉE

Mercredi 2 février 2005

L'usage de documents ou de calculatrices n'est pas autorisé. Chaque étudiant doit rendre deux copies. Les parties I, II et III sont à rendre sur copie blanche et le problème IV sur copie verte.

Partie I : Question de cours (3 points)

On rappelle le théorème de Rolle :

Théorème : *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} , dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

- 1) Rappeler le théorème des accroissements finis (la précision de l'énoncé est essentielle).
- 2) En admettant le théorème de Rolle, démontrer le théorème des accroissements finis (la démonstration, courte, doit être rédigée avec le plus grand soin).
- 3) Application : montrer que pour tout x et y dans \mathbb{R} on a

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Partie II : Exercice (3 points)

On rappelle que les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont deux à deux conjuguées. Il sera commode d'utiliser la notation exponentielle $z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Le conjugué \bar{z} de z étant alors $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^4 + 1$.

- 1) Déterminer les racines complexes de P .
- 2) En déduire la factorisation de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}([X])$ (c'est à dire à coefficients complexes).
- 3) En déduire la factorisation de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}([X])$ (c'est à dire à coefficients réels).

Partie III : Exercice (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 > 2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - 2$$

- 1) Montrer que, pour tout entier n , on a $u_n \geq 2$.
- 2) Montrer que si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors $\ell = 2$.
- 3) Montrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire que, pour tout entier n , $u_n \geq u_0$.
- 4) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Partie IV : Problème (10 points)

Avertissement : Les questions du problème ne sont pas indépendantes. Elles sont cependant rédigées de manière à ce que le résultat d'une question puisse être admis dans la suite. Cela nécessite une lecture attentive de l'ensemble du problème.

On rappelle que la fonction \exp (ou $x \rightarrow e^x$) est une application de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^{+*} et qu'elle vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0$ pour toute valeur de l'entier n (positive ou négative).

On rappelle également que le développement limité en 0 de \exp à l'ordre 4 est

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x) \quad (1)$$

- 1) Ecrire le développement de Taylor de $\exp(-x)$ à l'ordre 4 en 0.
- 2) Retrouver ce résultat à partir du développement limité (1) de $\exp(x)$ en remarquant que

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

On considère la fonction g définie par

$$g(x) = e^x - x - 1$$

- 3) Montrer que g est décroissante sur \mathbb{R}^- et croissante sur \mathbb{R}^+ . En déduire que g est une fonction positive (c'est à dire que $g(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Dans la suite on utilisera ce résultat. C'est à dire le fait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x \quad (2)$$

On considère maintenant la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 - \exp(-x)}$$

- 4) Quel est le domaine de définition de f ?
- 5) Calculer les limites (si elles existent)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}.$$

- 6) Calculer les limites (si elles existent)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

- 7) Montrer que f est une fonction dérivable sur son domaine de définition, calculer sa dérivée f' .
- 8) Montrer que f' est une fonction positive (on pensera à utiliser l'inégalité (2)).

On considère la fonction h définie par

$$h(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0, \quad \text{et} \quad h(0) = 1$$

- 9) Montrer que h est un prolongement par continuité de f , que h est dérivable sur \mathbb{R} .
- 10) Tracer le plus précisément possible le graphe (C) de h (on utilisera en particulier les résultats des questions 5, 6 et 8 pour préciser tangentes et asymptotes). L'étude de la position de la courbe par rapport aux tangentes et asymptotes sera appréciée.