

# Épreuve de Mathématiques (M11)

LICENCE DE SCIENCES - 1ÈRE ANNÉE

Mercredi 8 février 2006

*Durée : 3 heures*

*L'usage de documents ou de calculatrices n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Chaque étudiant doit rendre deux copies. Les exercices I, II sont à rendre sur copie blanche et le problème III sur copie verte.*

## Exercice I (5 pts)

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par

$$u_0 = 4, \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{5u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Montrer que  $u_n \geq 4, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- 2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_n$ .
- 3) Montrer que  $(u_n)_n$  est convergente, puis calculer sa limite.
- 4) Quel est le  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ ?

## Exercice II (5 pts)

- 1) Donner le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de zéro de la fonction  $g$  définie pour tout  $t$ , par  $g(t) = \sqrt{1+t}$ .
- 2) Etudier l'existence d'asymptotes quand  $x \rightarrow +\infty$  et quand  $x \rightarrow -\infty$  de la fonction  $f$  définie pour tout  $x$ , par  $f(x) = x + 1 - \sqrt{1+x^2}$  (on pourra faire un changement de variable pour se ramener au voisinage de zéro).
- 3) Préciser la position du graphe de  $f$  par rapport aux asymptotes.

**Partie III : Problème (10 points)**

On rappelle que la fonction  $\exp$  (ou  $x \rightarrow e^x$ ) est une application de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et qu'elle vérifie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \exp(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0$$

pour toute valeur de l'entier  $n$  (positive ou négative).

On donne  $e^1 = e \approx 2.72$ ,  $e^{-1} \approx 0.37$ ,  $e^{-2} \approx 0.14$ .

On considère d'abord la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^x + x + 1.$$

- 1) Rappeler pourquoi  $f$  est continue, calculer des valeurs approchées de  $f(-2)$  et  $f(-1)$ . Énoncer très précisément le théorème qui permet d'affirmer l'existence d'un réel  $a$  dans  $] -2, -1[$  tel que  $f(a) = 0$ .
- 2) Rappeler pourquoi  $f$  est dérivable. Calculer la fonction dérivée  $f'$ . Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) \geq 1$ .
- 3) Démontrer par l'absurde qu'il ne peut pas exister un réel  $b$  différent de  $a$  tel que  $f(b) = 0$ . On énoncera très précisément le théorème utilisé.
- 4) Déterminer le sens de variation de  $f$  puis le signe de  $f(x)$ .

On considère maintenant la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = \frac{x}{1 + e^{-x}}.$$

- 5) Quel est le domaine de définition de  $g$  ? Cette fonction est-elle paire ? impaire ?
- 6) Écrire le développement de Taylor à l'ordre 1 de  $e^{-x}$  au voisinage de 0. En déduire le développement limité de  $g$  à l'ordre 2 au voisinage de 0.
- 7) Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x).$$

- 8) Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x.$$

- 9) Montrer que  $g$  est une fonction dérivable et calculer sa dérivée  $g'$ . Montrer que le signe de  $g'(x)$  est le même que celui de  $f(x)$  étudié à la question 4).
  - 10) Tracer avec précision le graphe de  $g$ . On précisera la façon dont on a tenu compte des résultats des questions précédentes.
-