

# Épreuve de Mathématiques (M11)

LICENCE DE SCIENCES - 1ÈRE ANNÉE

Vendredi 9 février 2007

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Chaque étudiant doit rendre deux copies. Les exercices II, III sont à rendre sur copie blanche et le problème I sur copie verte.

## Problème I (10 points : 1 par question)

On rappelle que la fonction logarithme  $\ln$  est une application de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle vérifie, pour toute valeur non nulle de l'entier (positif ou négatif)  $n$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n$$

On considère d'abord la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x - 1 - \ln|x|$ . On donne les valeurs approchées  $g(-0.2) \approx 0.41$  et  $g(-0.3) \approx -0.10$ .

- 1) Quel est le domaine de définition de  $g$  ? Cette fonction est-elle paire ? impaire ? Calculer la fonction  $g'$ , dérivée de  $g$ .
- 2) Calculer les limites de  $g$  en  $0$ ,  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 3) Etablir le tableau de variation de la fonction  $g$ .
- 4) Montrer qu'il existe un réel  $a$  appartenant à  $] -0.3, -0.2[$  tel que  $g(a) = 0$ . Énoncer très précisément le théorème utilisé. Qu'est-ce qui permet d'affirmer l'unicité de  $a$  ?
- 5) Étudier le signe de  $g(x)$ .

On considère maintenant la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x \ln|x|}{x-1}.$$

- 6) Quel est le domaine de définition de  $f$  ? Calculer la dérivée de  $f$  et montrer qu'elle est de même signe que  $g$ . Etablir le tableau de variation de  $f$ .
- 7) Calculer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $0$ .
- 8) Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de  $\ln(1+u)$  au voisinage de  $u=0$ . En déduire le développement limité de  $f$  à l'ordre 1 au voisinage de  $1$ . Calculer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $1$ .

On considère maintenant la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = f(x)$  si  $x \notin \{0, 1\}$ ,  $h(0) = 0$  et  $h(1) = 1$ .

- 9) Montrer que  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  mais non dérivable en  $0$ .
- 10) Tracer le graphe de  $h$ .

### Exercice II (7 points)

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif, et soit  $(u_n)_n$  la suite récurrente définie par

$$u_{n+1} = \frac{u_n + a + 1}{a} \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$

On pose  $v_n = u_{n+1} - u_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) ( 1 pt) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $v_{n-1}$ . En déduire qu'il existe une valeur  $a_0$  de  $a$ , qu'on précisera, pour laquelle  $(v_n)_n$  est une suite constante.
- 2) ( 1 pt) Montrer que pour tout  $a \neq a_0$ ,  $(v_n)_n$  est une suite géométrique dont on donnera la raison.
- 3) (2 pts) Donner l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  et  $a$ , puis en déduire que pour tout  $a \neq 1$ ,  $S_n$  s'exprime en fonction de  $n$  et  $a$  par :

$$S_n = 2 \frac{a^n - 1}{a^n(a - 1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- 4) (1,5 pt) Calculer  $\lim_n S_n$  en fonction des valeurs de  $a$ .
- 5) (1,5 pt) Montrer que  $u_n = S_n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , puis en déduire  $\lim_n u_n$  en fonction des valeurs de  $a$ .

### Exercice III (3 points)

- 1) (1 pt) Vérifier que la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

s'écrit au voisinage de  $+\infty$  :

$$f(x) = x \sqrt{\frac{x}{x-1}} = x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

- 2) ( 2 pts ) Montrer, en utilisant le développement limité de  $(1 - u)^{-\frac{1}{2}}$ , à l'ordre 2 au voisinage de zéro, que la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = x + \frac{1}{2}$ . Préciser la position de la courbe par rapport à cette droite.
-