Université de Toulon
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L3 MATHS

M62

Examen du 19 mai 2016

PARTIE ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

où f est une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times E$, à valeurs dans E. Soit $y_0 : I \to E$ une solution de l'équation différentielle, c'est à dire y_0 dérivable sur I et pour tout $t \in I$, $(t, y_0(t)) \in U$ et $y_0'(t) = f(t, y_0(t))$. Montrer que si f est de classe $C^k(\mathbb{R} \times E; E)$, alors, y_0 est de classe $C^{k+1}(\mathbb{R}\,; E)$.

Exercice 2. Equations de Bernoulli
(1) Soient a et b deux fonctions dans $C^1(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}\,)$, et soit $r \in]1, +\infty[$. Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & a(x)y + b(x)y^r \end{array}$$

Pour (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ donné, on considère le problème de Cauchy suivant:

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^r \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

(a) Montrer que f est localement lipschitzienne dans la deuxième variable.
(b) Pour $y_0 > 0$, montrer que l'on peut effectuer le changement de variable $z = y^{1-r}$, et que ce changement de variable permet de ramener la résolution de (E_1) à la résolution d'une équation différentielle linéaire que l'on explicitera.
(2) Donner toutes les solutions de l'équation linéaire

$$z'(x) = \cos(x)z(x) + \mathrm{e}^{x+\sin(x)}.$$

A l'aide de la question (1), en déduire la solution maximale pour le problème de Cauchy non linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = -\cos(x)y(x) - \mathrm{e}^{x+\sin(x)}y^2(x) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Exercice 3. Soit le problème de Cauchy

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y'(x) = \mathrm{e}^{-xy(x)} \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

(1) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale de (E).
(2) Montrer que toute solution (y, I) de (E) est impaire et strictement croissante.
(3) Écrire l'équation intégrale associée à (E) et montrer que la solution maximale est définie sur tout $\mathbb{R}$.