Université de Toulon
L1 Sciences Économiques et Gestion - Mathématiques appliquées 2

Durée: 2h00

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont **interdits**. On tiendra le plus grand compte de la présentation.

Exercice I (6pts). On considère les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Calculer A^{-1}.
ii) La matrice B est-elle inversible?
iii) Calculer C^2 et C^3. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iv) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite de vecteurs $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ par $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et par la relation de récurrence $X_{n+1} = CX_n$, $(n \geq 1)$.
En utilisant la relation $X_{n+1} = CX_n$, montrer par récurrence sur n que $X_{n+1} = C^n X_1$.
En déduire une expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice II (4pts). Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-2x - 2y + z;\ 2x + y - z;\ x + y + z) \end{array}$$

i) Montrer que f est une application linéaire
ii) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3}(f)$, la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
iii) Déterminer le rang de l'application linéaire f.

Exercice III (5pts). On considère l'application

$$g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} \end{array}$$

i) Montrer que g admet pour seuls points critiques $(-1,0)$, $(0,0)$ et $(1,0)$ (faire une rédaction rigoureuse).
ii) Calculer la matrice Hessienne de g.
iii) Parmi les points critiques de g, déterminer ceux qui sont des extremas locaux, en précisant leur nature, et ceux qui sont des points cols.

Exercice IV (5pts). Soit la fonction

$$h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x(\ln(x))^2 + xy^2 \end{array}$$

i) Donner le domaine de définition de h et le domaine de dérivation de h (justifier).
ii) Calculer les dérivées partielles de la fonction h.
iii) Montrer que $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$ sont des points critiques de h.
iv) Calculer les dérivées partielles secondes et en déduire la matrice Hessienne de h.
v) Quelle est la nature des points critiques $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$?
vi) (*question bonus* +1,5pts) Montrer que $(1,0)$ est un minimum global.