Cours - TD: Mathématiques appliquées 2 (semestre 2)

U.F.R. Sciences Économiques et de Gestion

L1 Économie (2016-17)

Cours: J.-M. Barbaroux.
Travaux dirigés: J.-M. Barbaroux & E. Leopold
email: barbarou@univ-tln.fr
web: http://barbarou.univ-tln.fr

Introduction

Que ce soit en Économie, en Physique (mécanique, optique, electromagnétisme, mécanique quantique, astrophysique, etc.), en Biologie (dynamique des populations, neurosciences), ou en Sciences Humaines (sociologie, étude de réseaux complexes), lorsqu'un problème est formalisé par les mathématiques, par exemple à l'aide d'équations, il est rarement sous une forme "simple".

Certains problèmes se formulent à l'aide d'une branche des mathématiques, que l'on nomme **algèbre linéaire**, soit comme une modélisation directe du problème lui-même, soit comme approximation dans certaines conditions.

L'avantage de l'algèbre linéaire, sans être une branche triviale des mathématiques, et qu'il est possibe, grâce à une formalisation que nous allons découvrir, de résoudre explicitement certains problèmes dits "linéaires', et/ou de les programmer pour que les machines les résolvent à notre place.

En Économie, le paradigme de l'algèbre linéaire est le modèle de Leontieff (Prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 1973), que nous découvrirons dans ce cours.

Nous allons introduire les bases de l'algèbre linéaire, dans un cas simple qui couvre déjà de nombreux problèmes.

Le plan du cours d'algèbre linéaire sera le suivant:

(1) Systèmes linéaires - Résolution par pivot de Gauss
(2) Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ - Familles libres, familles génératrices, bases.
(3) Matrices - Calcul matriciel - Déterminants - Méthodes de calcul de déterminants
(4) Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Représentation d'une application linéaire par une matrice. Rang d'une application linéaire.
(5) Réduction des endomorphismes diagonalisables (diagonalisation)

L'objectif de ce cours est double:

► Savoir repérer un problème d'algèbre linéaire déjà rencontré, et le résoudre en appliquant les méthodes mathématiques vues en cours.

► Se familiariser avec les concepts mathématiques vus en cours pour être capable de modéliser les problèmes, d'interpréter les résultats donnés par l'application des méthodes de calculs, et, le cas échéant, créer un algorithme pour mener les calculs.

Le premier objectif n'est pas difficile. Il suffit d'être attentif à tout ce qui est dit en cours, et de bien suivre les exemples traités en cours. Il suffit ensuite d'appliquer directement les méthodes vues, en préparant ses feuilles de TD avant la séance de TD.

Le deuxième objectif demande plus de temps et aussi de la régularité dans le travail. Notamment, il faudra relire son cours avant le TD suivant. Il est normal de ne pas comprendre tout de suite les subtilités, ou plus simplement l'utilité de certaines notions. N'hésitez pas, en début de cours, à poser des questions sur le cours précédent.

Ce cours d'algèbre linéaire sera utilisé dans la seconde partie concernant "l'Analyse", en particulier pour les calculs de minimisation/maximisation avec ou sans contraintes. Nous l'utiliserons aussi partiellement quand nous aborderons les équations différentielles linéaires.

Chaque exercice du fascicule de TD est marqué d'un symbole:

- Le symbole $\heartsuit$ mentionne les exercices fondamentaux; ces exercices sont pour la plupart élémentaires et on trouve leurs solutions dans de nombreux ouvrages de référence ou en ligne. Ces exercices doivent être tous systématiquement préparés. Ils sont indispensables à la bonne *utilisation des méthodes* vues en cours, et sont déjà une première base pour acquérir les notions mathématiques.

- Le symbole $\clubsuit$ est utilisé pour les exercices de difficulté moyenne. Ce sont en général de bons exercices pour s'entraîner et vérifier que l'on a bien acquis les notions du cours. Ces exercices ne se résolvent pas nécessairement par application directe d'une méthode vue en cours. Ils requièrent de passer un peu plus de temps dessus. C'est avec ces exercices que vous *comprendrez* les notions du cours.

- Le symbole $\spadesuit$ accompagne les exercices qui présentent souvent plusieurs difficultés. Ils sont utiles pour aller un peu plus loin.

Seuls des exercices de type $\heartsuit$ et $\clubsuit$ seront au programme des examens.

1. Fiche de cours: Systèmes linéaires

Définition 1.1. *On appelle équation linéaire réelle (respectivement complexe) d'inconnues* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *toute relation du type*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b, \tag{1}$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_p, b$ *sont des nombres réels (respectivement complexes).*
Exemple: L'équation de droite

$$y - 3x = 1 \quad (\text{ou encore } y = 3x + 1).$$

est une équation linéaire réelle. Dans cet exemple, les variables x_1 et x_2 sont respectivement y et x, et $a_1 = 1$, $a_2 = -3$, $b = 1$.

Remarque. *Les inconnues* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *sont aussi appelées les variables de l'équation.*

Définition 1.2 (Systèmes linéaires). *On appelle système linéaire de* n *équations à* p *inconnues* $x_1, x_2, \cdots, x_p$*, une liste de* n *équations de la forme*

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1p}x_p & = b_1 & (\textit{ligne 1, notée } L_1) \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2p}x_p & = b_2 & (\textit{ligne 2, notée } L_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & = \vdots & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & +\cdots & +a_{np}x_p & = b_n & (\textit{ligne } n\textit{, notée } L_n) \end{array}\right. \tag{2}$$

Remarque. *Pour la résolution des systèmes par la méthode du pivot de Gauss (voir plus bas), il est commun de numéroter chaque ligne par* $L_1, L_2, \cdots, L_i, \cdots, L_n$.

L'indice i *dans* a_{ij} *correspond à l'indice de "ligne", c'est à dire que* a_{ij} *intervient dans la* i*-ème ligne* L_i *du système*

L'indice j *dans* a_{ij} *correspond à l'indice de "colonne", c'est à dire que* a_{ij} *est le coefficient devant la* j*-ème inconnue* x_j.

Définition 1.3. *Une solution du système linéaire* (2) *est une liste de* p *nombres réels (complexes)* $(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ *qui mis à la place de* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *vérifient l'équation* (2).

Résoudre une équation linéaire réelle (resp. complexe) consiste à décrire l'ensemble des listes de p *nombres réels (resp. complexes) qui vérifient la relation* (1)

Remarque. *Une liste de* p *nombres réels* $(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ *est appelée un* p*-uplet. Un* p*-uplet se note avec des parenthèses et chaque réel est séparé des autres par une virgule ou un point-virgule. Cette notation est importante, et l'utilisation d'accolades* $\{\ \}$ *pour un* p*-uplet est incorrecte, car cela est réservé à la notation des ensembles.*
⚠ *L'ordre des réels dans le* p*-uplet est important, car il correspond à l'ordre dans lequel on remplace les valeurs dans les variables. Ainsi,* $(1, 2) \neq (2, 1)$.

DÉFINITION 1.4.

- *On appelle coefficients d'un système linéaire les valeurs* a_{ij}*, où* $i \in \{1, \cdots, n\}$, $j \in \{1, \cdots, p\}$.
- *On appelle second membre d'un système linéaire le n-uplet* $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$.
- *On dira qu'un système linéaire est homogène si le second membre est nul, i.e., si* $(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (0, 0, \cdots, 0)$.

Exemple: Le système

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & & -4x_3 & = & -1 \end{array} \right. \tag{3}$$

admet comme solution $(1, 2, 1)$. Ce n'est pas la seule solution de ce système. Ce n'est pas un système homogène. Il admet pour second membre $(1, -1)$.

DÉFINITION 1.5 (Systèmes équivalents). *On dira que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Exemple: On peut montrer que le système (3) est équivalent au système:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & 3x_2 & -10x_3 & = & -4 \end{array} \right.$$

La fin de ce chapitre est consacrée aux méthodes permettant d'obtenir, à partir d'un système linéaire donné, des systèmes linéaires équivalents. Nous verrons aussi une méthode standard de résolution des systèmes linéaires: *Le pivot de Gauss.* Dans les chapitres ultérieurs, nous verrons d'autres méthodes de résolution.

THÉORÈME 1.6. *Pour tout système linéaire de la forme* (2)*, on a l'un des 3 cas suivants:*

(1) Le système n'admet aucune solution
(2) Le système admet un p-uplet de solution et un seul
(3) Le système admet une infinité de p-uplets solutions.

REMARQUE. *i) Les systèmes homogènes admettent toujours comme solution (au moins) le p-uplet* $(0, 0 \cdots, 0)$.
ii) D'après ce théoreme, il n'est pas possible de trouver seulement deux (ou un nombre fini strictement supérieur à un) solutions à un système linéaire. Dès qu'on a plus d'une solution, il y en a forcément une infinité.

Résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss

Pour résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss, on va remplacer le système initial par des systèmes équivalents (au sens de la définition 1.5) grâce à certaines opérations sur les lignes. L'objectif est d'aboutir à un système que l'on peut résoudre simplement, qu'on nomme "système échelonné".

Définition 1.7. *Un système est dit échelonné si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne est strictement croissant d'une ligne à l'autre.*

Exemple. Les systèmes suivants sont échelonnés.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & 3x_2 & -10x_3 & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 1 \\ & x_2 & -10x_3 & -4x_4 & = & -4 \\ & & 2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ & & & -6x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -3x_2 & +x_3 & +\sqrt{5}x_4 & = & 1 \\ & & 3x_3 & -2x_4 & = & -4 \\ & & & +7x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Définition 1.8. *Etant donné un système linéaire, de n équations à p inconnues $x_1, \cdots, x_p$, on transforme le système en un système équivalent si on procède à l'une des opérations suivantes sur les lignes.*

(1) On remplace une ligne par un multiple d'elle-même:
$L_i \longrightarrow \lambda L_i$*, où* λ *est un nombre non nul quelconque.*

(2) On remplace une ligne par elle-même plus un multiple d'une autre ligne:
$L_i \longrightarrow L_i + \lambda L_j \quad (i \neq j)$.

(3) On intervertit deux lignes quelconques:
$L_i \longleftrightarrow L_j$.

Exemple. Voici un exemple d'applications des règles ci-dessus qui permettent de transformer le système initial en des systèmes équivalents. On écrira le symbole $\Leftrightarrow$ entre deux systèmes pour mettre en évidence que les systèmes sont équivalents. On écrira aussi dans chaque système l'opération sur les lignes que l'on va effectuer et qui permettra d'obtenir le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 5 \qquad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & & -4x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & & -4x_3 & = & -1 \end{array} \right. \quad L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & +3x_2 & -3x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & & -4x_3 & = & -1 \quad L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & 3x_2 & -3x_3 & = & 3 \\ & 3x_2 & -10x_3 & = & -4 \end{array} \right. \quad L_2 \longrightarrow \tfrac{1}{3}L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & 1 \\ & 3x_2 & -10x_3 & = & -4 \end{array} \right. \quad L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & 1 \\ & & -7x_3 & = & -7 \end{array} \right. \quad L_3 \longrightarrow -\tfrac{1}{6}L_3 \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & 1 \\ & & x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

Le système de départ a donc les mêmes solutions que le dernier système. L'avantage est que le dernier système se résout simplement. On trouve $x_3 = 1$, qui donne alors avec la ligne 2 (du dernier système) $x_2 = 1 + x_3 = 1 + 1 = 2$, puis avec la ligne 1, $x_1 = x_2 - 2x_3 + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$. Le système admet donc comme unique solution le triplet: $(1, 2, 1)$.

C'est un exemple d'application de la méthode de résolution par le pivot de Gauss.

Pour la résolution d'un système linéaire par la méthde du pivot de Gauss, les étapes sont les suivantes:

(1) On réécrit le système en plaçant en ligne 1 une ligne où le premier coefficient est non nul. Si possible, on choisit une ligne où le premier coefficient vaut 1.
(2) Si le premier coefficient de la ligne 1 est différent de 1, on remplace la première ligne par elle-même divisée par la valeur du premier coefficient de cette ligne. On obtient alors une ligne où le premier coefficient a pour valeur 1.
(3) On laisse inchangée la ligne 1, et on remplace chaque ligne L_i (successivement pour $i = 2, \cdots, n$) par elle-même moins la première ligne fois le premier coefficient de la ligne i: $L_i \longrightarrow L_i - a_{i1}L_1$. On obtient alors un système où les lignes 2 à n ont leur premier coefficient nul.
(4) On conserve la ligne 1 inchangée (et cela jusqu'à la fin), et on procède avec les lignes 2 à n en recommençant au point 1.

Exercice. Vérifiez que l'on a bien procédé ainsi dans l'exemple précédent.

Exercice. Résolvez les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S1) : \left\{ \begin{array}{rrrr} 2x_1 & -x_2 & = & -6 \\ x_1 & +2x_2 & = & 7 \end{array} \right. \qquad (S2) : \left\{ \begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$(S3) : \left\{ \begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & +4x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +6x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +3x_2 & +x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -3x_4 & = & 4 \end{array} \right. \qquad (S4) : \left\{ \begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & -2 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

2. Fiche de cours: Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ - Familles libres, familles génératrices, bases.

2.1. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. L'algèbre linéaire requiert de travailler sur des ensembles qui ont une certaine structure. Pour faire simple, on aura besoin de travailler avec des ensembles dans lesquels on peut "sommer" les éléments et le résultat obtenu reste dans l'ensemble, et on peut les "multiplier par un nombre" (réel ou complexe), que l'on appellera un scalaire, et le résultat obtenu reste dans l'ensemble. On appelle ces propriétés *stabilité par addition* et *stabilité par multiplication par un scalaire.* Notez qu'il n'est pas nécessaire de pouvoir multiplier ces éléments entre eux, même si on verra des cas où c'est possible. En fin de chapitre, nous donnerons une définition de ces espaces, que l'on appellera espaces vectoriels.

Exercice. Donnez des exemples d'ensembles que vous connaissez et qui respectent ces deux conditions (stabilité par addition et stabilité par multiplication par un réel). Donnez aussi des exemples d'ensembles qui ne respectent pas l'une au moins ces deux conditions.

Pour l'essentiel de ce chapitre et de cette année, nous allons nous intéresser aux cas particuliers des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Définition 2.1. *Soit n un entier non nul. On appelle $\mathbb{R}^n$, noté aussi $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$, l'ensemble des n-uplets définis par*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont appelés vecteurs.

Remarque. *On définit de la même manière $\mathbb{C}^n$. Dans la suite, on notera les éléments de $\mathbb{R}^n$ par des vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Le choix de notation en ligne ou en colonne n'est pas identique, même si pour l'instant, la distinction entre les deux notations semble être sans importance. C'est pourquoi on adoptera plutôt la notation en colonne pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans la suite.*

Exemple. L'élément $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathbb{R}^4$. Le 4-uplet $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un autre.

Définition 2.2 (Somme - Produit extérieur). *Soient* $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *deux éléments de* $\mathbb{R}^n$*. Alors:*

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \qquad \textit{(somme)}$$

$$\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} \qquad \textit{(produit extérieur par un scalaire } \lambda \in \mathbb{R}\textit{)}$$

Le vecteur nul (qui sera appelé élément neutre) est $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$*. L'opposé d'un vecteur* u *est le vecteur noté* $-u$ *et qui vérifie* $u + (-u) = 0$*, c'est donc le vecteur* $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$.

Remarque. *i) Plutôt que la notation* u*, on utilise parfois* $\vec{u}$ *(notation du lycée).*
ii) Dans $\mathbb{R}^2$*, on peut aussi représenter la somme de vecteurs, et le produit extérieur, par un schéma.*

La structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ permet d'avoir les propriétés suivantes qui sont bien connues dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3. *Pour* u*,* v *et* w *vecteurs quelconques de* $\mathbb{R}^n$ *et* λ *et* μ *deux réels quelconques, on a*

1. $u + v = v + u$;	2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$	4. $u + (-u) = 0$
5. $1u = u$	6. $0u = 0$
7. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$	8. $\lambda(\mu u) = \lambda(\mu u)$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est usuellement représenté par l'axe des abscisses.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est représenté par le plan.

Exercice. Démontrez les propriétés de la proposition 2.3 dans le cas $\mathbb{R}^2$.

2.2. **Familles libres, familles génératrices, bases.**

Définition 2.4 (Combinaisons linéaires). *Soient $v^{(1)}, \cdots, v^{(p)}$, p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $v^{(1)}, \cdots, v^{(p)}$, tout vecteur de la forme*

$$\lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \cdots + \lambda_p v^{(p)},$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_p$ sont p nombres réels. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_p$ sont les coefficients de la combinaison linéaire.

Définition 2.5 (Familles libres ou linéairement indépendantes). *Soient $v^{(1)}, \cdots, v^{(p)}$, p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dira que la famille de vecteurs $\{v^{(1)}, \cdots, v^{(p)}\}$ est libre si*

$$\left(\lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \cdots + \lambda_p v^{(p)} = 0\right) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0)$$

On dira aussi que c'est une famille linéairement indépendante.

Remarque. *i) D'après la définition, une famille est libre si et seulement si la seule façon d'avoir une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille qui donne le vecteur nul est que tous les coefficients de la combinaison soient nuls.*
ii) Pour montrer qu'une famille donnée est libre, on supose qu'une combinaison linéaire des éléments de cette famille vaut le vecteur nul, et on montre que les seuls coefficients qui réalisent cela sont tous nuls.
iii) Une famille de vecteurs est libre si aucun vecteur de cette famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Exemple. Montrer que $\{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^4$. Pour cela, on suppose qu'il existe λ_1, λ_2 et λ_3 tels que:
$\lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \lambda_3 v^{(3)} = 0$. On a alors:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\-\lambda_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_2\\\lambda_2\\2\lambda_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\lambda_3\\-\lambda_3\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix}\lambda_1 & +\lambda_2 & \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 \\ -\lambda_1 & +2\lambda_2 & -\lambda_3 \\ & & \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}$$

Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 & +2\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \\ & & \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Que l'on peut résoudre par pivot de Gauss (ou plus directement) et dont la seule solution est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$. Ce qui permet de conclure que la famille de vecteurs $\{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}$ est libre.

⚠ Remarquez bien qu'il était clair dès le début que $(0, 0, 0)$ était une solution possible. La question était de savoir si c'était bien la seule.

Exercice. Etudier les systèmes suivants et dire s'ils sont libres ou pas.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ; \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} ;$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ; \quad S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

THÉORÈME 2.6. *Si $\{v^{(1)}, \cdots, v^{(p)}\}$ est une famille libre, alors toute sous-famille, c'est à dire tout ensemble inclus dans $\{v^{(1)}, \cdots, v^{(p)}\}$, est aussi une famille libre.*

Exemple. La famille $\{v^{(1)}, v^{(3)}\}$, où $\{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}$ est la famille libre de l'exemple ci-dessus, est une famille libre.

DÉFINITION 2.7 (Familles liées ou linéairement dépendantes). *On dit qu'une famille de vecteurs $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$ est une famille liée, ou linéairement dépendante, si elle n'est pas une famille libre.*

THÉORÈME 2.8. *i) Si une famille est liée, alors il existe (au moins) un vecteur de cette famille qui est combinaison linéaire des autres.*
ii) Si $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$ est une famille liée, alors tout ensemble de vecteurs contenant $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$ est aussi une famille liée.
iii) Si $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et si $p > n$, alors nécessairement, $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$ est une famille liée.

Remarque. *Quand deux vecteurs sont linéairement dépendants, on dit qu'ils sont colinéaires. Dans* $\mathbb{R}^2$ *(ou dans* $\mathbb{R}^3$*), on a une bonne représentation géométrique de deux vecteurs colinéaires.*

De manière générale, il peut être utile d'avoir une représentation géométrique des vecteurs. Par exemple, deux vecteurs colinéaires peuvent se représenter comme appartenant à la même droite (vectorielle).

Trois vecteurs formant une famille liée sont tels que l'un peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres. Dans l'exemple de la famille S_2 *ci-dessus, on a par exemple que le 3ème vecteur est la somme des deux premiers.*

Définition 2.9 (Espace engendré.). *Soit* $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$ *une famille quelconque de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*. On notera* $\mathrm{Vect}\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$ *l'ensemble constitué de toutes les combinaisons linéaires possibles des vecteurs* $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}$*:*

$$\mathrm{Vect}\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\} = \{\lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \cdots \lambda_n v^{(n)} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Théorème 2.10. *L'ensemble* $\mathfrak{V} := \mathrm{Vect}\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$ *est un espace-vectoriel (dont nous n'avons pas encore vu la définition dans un cas général). Cela signifie en particulier que la somme de deux vecteurs quelconque de* $\mathfrak{V}$ *est encore dans* $\mathfrak{V}$*, et que le produit d'un vecteur de* $\mathfrak{V}$ *par un scalaire* λ *est aussi dans* $\mathfrak{V}$*. On a aussi que les éléments de* $\mathfrak{V}$ *vérifient toutes les propriétés de la proposition 2.3.*

Remarque. *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$*, l'espace vectoriel engendré par* $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$*, c'est à dire l'ensemble des multiples de ce vecteur, peut être vu comme une droite (vectorielle). Cela reste vrai pour toute famille engendrée par un seul vecteur. C'est aussi vrai dans* $\mathbb{R}^3$ *ou dans* $\mathbb{R}^p$*; mais pour* $p \geq 4$ *c'est plus difficile à en avoir une représentation mentale. Dans* $\mathbb{R}^3$*, l'espace vectoriel engendré par* $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ *peut être vu comme un plan (vectoriel); c'est le plan qui contient les deux vecteurs en question. Cela reste vrai pour toute famille engendrée par deux vecteurs linéairement indépendants.*

Définition 2.11 (Famille génératrice). *Soit* $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$ *une famille de* p *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*. On dit que cette famille est génératrice de* $\mathbb{R}^n$ *si tout vecteur* u *de* $\mathbb{R}^n$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de* $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(p)}\}$*:*

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \text{ tels que } u = \lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \cdots + \lambda_p v^{(p)}.$$

Exemple. La famille $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

La famille $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice. Pouvez-vous donnez une famille (la plus "simple possible") qui soit génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Est-il possible de contruire une famille de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui soit une famille génératrice? (pensez à la représentation géométrique).

Définition 2.12 (Base). *On appelle base d'un espace vectoriel toute famille qui est à la fois libre et génératrice.*

Exemple. La famille $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On peut montrer que la famille $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.13 (Dimension d'un espace vectoriel). *Un espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une base avec un nombre fini de vecteurs. Dans ce cas là, la dimension de l'espace vectoriel est égal au nombre de vecteurs d'une base de cet espace vectoriel.*

Remarque. *i) Cette définition contient une propriété: Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre de vecteurs.*
ii) On n'en parlera pas (ou très peu) cette année; mais il existe des espaces vectoriels de dimension infinie. Vous en avez déjà rencontré (au moins) un au semestre précédent.
iii) On a la propriété $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. *Montrez le (commencez par exemple dans le cas* $n = 3$*). La base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *est la famille de* n *vecteurs* $\{e^{(1)}, e^{2)}, \cdots, e^{(n)}\}$ *telle que pour tout* j*, le vecteur* $e^{(j)}$ *est le vecteur ayant pour* j*ème composante* 1 *et ses autres composantes nulles. Voir la première famille donnée dans l'exemple ci-dessus dans le cas de* $\mathbb{R}^3$*.*
v) Il peut sembler curieux, dans le cas de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$*, de vouloir déterminer d'autres bases que la base canonique. On verra plus tard que cela sera très utile de trouver d'autres bases.*
vi) La notion de base est une généralisaton de la notion de repère. Vous avez (probablement) vu, dans $\mathbb{R}^2$*, que tout vecteur se décompose comme combinaison linéaire des vecteurs de la base orthonormale usuelle* $(\vec{i}, \vec{j})$*. Les vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *sont en fait*

exactement les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$*. On peut aussi décomposer tout vecteur de* $\mathbb{R}^2$ *dans des bases différentes; par exemple dans la base* $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i} + \vec{j}, 2\vec{i})$ *(faire un dessin).*

La définition de dimension d'un espace vectoriel et la remarque i) ci-dessus, viennent de la propriété suivante:

Proposition 2.14. *i) Dans un espace vectoriel de dimension* n*, toute famille libre contenant exactement* n *éléments est aussi une famille génératrice. C'est donc une base.*
ii) Dans un espace vectoriel de dimension n*, toute famille génératrice contenant exactement* n *éléments est aussi libre. C'est donc une base.*
iii) Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension n *contient au plus* n *éléments.*
iv) Toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension n *contient au moins* n *éléments.*

Exemple. Dans un exercice précédent, on a vu que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Comme c'est une famille libre de 3 vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, c'est aussi une famille génératrice, et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. *Les propriétés iii) et iv) ci-dessus vous sont familières. En effet, dans* $\mathbb{R}^3$ *vous savez (ou devinez) bien qu'il n'est pas possible, avec deux vecteurs seulement, d'engendrer tout* $\mathbb{R}^3$*: deux vecteurs* u *et* v *étant fixés dans* $\mathbb{R}^3$*, il n'est pas possible que tous les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *soient combinaison linéaire de ces deux vecteurs. Il suffit de choisir un vecteur* w *en dehors du plan (vectoriel) engendré par* u *et* v*, et on n'aura jamais* $w = \lambda u + \mu v$*.*

De même dans $\mathbb{R}^2$ *(pour faire simple), si on fixe 3 vecteurs, ils ne formeront jamais une famille libre. Il y aura toujours un des vecteurs combinaison linéaire des deux autres.*

2.3. **Espaces vectoriels quelconques.** On termine ce chapitre par la définition d'espaces vectoriels plus généraux que $\mathbb{R}^n$. On se restreindra quand même à un cas particulier. Le cas général n'est pas plus difficile à comprendre, mais nécessite une caractérisation bien plus longue. Dans un cours "classique" on devrait normalement introduire la notion générale d'espace vectoriel, et ensuite seulement, écrire la définition ci-dessous comme une propriété. Le temps manque. On s'en tiendra donc là, et c'est bien suffisant pour l'instant.

Définition 2.15 (Sous-espace vectoriel). *Soit E un espace vectoriel où les scalaires sont les éléments de $\mathbb{R}$. Un sous-ensemble $F \subset E$ est un espace vectoriel s'il vérifie les trois propriétés suivantes:*

(1) F n'est pas l'ensemble vide
(2) Si u et v sont deux vecteurs de F, alors $u + v \in F$
(3) Si u est un vecteur de F et λ est un scalaire, alors $\lambda u \in F$.

Dans ce cas là, on dira que F est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 2.16. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors il vérifie toutes les propriétés de la proposition 2.3.*

Exercice. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit $F = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que les deux vecteurs qui engendrent F forment une famille libre. Pourquoi est-ce une famille génératrice de F (revenir à la définition 2.9 d'espace engendré). Conclure que ces deux vecteurs forment une base de F, et en déduire la dimension de F. Géométriquement, qu'est-ce que F? Existe-t-il un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas dans F? Si oui, donnez-en un.

Théorème 2.17. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors on a*

$$E = F \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F).$$

Exercice. Utiliser le théorème 2.17 pour montrer: $\text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$

Théorème 2.18. *Soit E un espace vectoriel. Soient $F_1 \subset E$ et $F_2 \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Exercice ♣ . Montrer ce résultat dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$.

Exemple ♣ /♠ . Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, et $u_3 = (0, 1, 2)$. Soit le sous-espace vectoriel $F_1 = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$. Soit l'ensemble $F_2 = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$.
i) Que vaut $\dim(F_1)$?
ii) Montrer que F_1 est l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z)$ tels que $x = z$.
iii) Montrer que $F_2 = \text{Vect}(u_1, u_3)$. En déduire que F_2 est un espace vectoriel. Quelle est la dimension de F_2?
iv) Déterminer $F_1 \cap F_2$.

3. Fiche de cours: Matrices - Calcul matriciel - Déterminants - Méthodes de calcul de déterminants

Dans ce chapitre, nous définissons de nouveaux objets mathématiques, les matrices, et une quantité associée à chaque matrice, le déterminant. Ces objets seront très utiles dans les deux paragraphes suivants, mais aussi pour la résolution de systèmes linéaires de n équations à n inconnues.

3.1. **Définitions.**

Définition 3.1 (Matrice).

- *Une matrice est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Les matrices sont notées usuellement avec des lettres majuscules.*
- *Une matrice est de taille $n \times p$ si c'est un tableau qui possède n lignes et p colonnes. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathfrak{M}_{n,p}$.*
- *Les valeurs dans le tableau sont appelées les coefficients de la matrice.*
- *Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne de la matrice A est noté $a_{i,j}$ ou a_{ij}. (si la matrice est notée B, on notera les coefficients par b_{ij}, etc.). On utilise alors la notation $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ ou encore $A = (a_{ij})$.*

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & \pi & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 12 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice 4×5, puisqu'elle possède 4 lignes et 5 colonnes. L'élément $a_{2,4}$ est π et l'élément $a_{4,2}$ est 1.

Définition 3.2 (Quelques matrices remarquables).

- *Une matrice $n \times n$, i.e., ayant le même nombre de lignes et de colonnes, est une matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées $n \times n$ est noté $\mathfrak{M}_{n,n}$ ou $\mathfrak{M}_n$. Une matrice $n \times n$ est appelée matrice d'ordre n.*
- *Dans une matrice carrée, on appelle diagonale les éléments $a_{i,i}$ ayant même indice de ligne et de colonne.*
- *Une matrice carrée est triangulaire supérieure si tous ses coefficients au dessous de la diagonale sont nuls. Elle est triangulaire inférieure si tous ses coefficients au dessus de la diagonale sont nuls.*
- *Une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf les éléments diagonaux, est appelée matrice diagonale.*
- *Une matrice (carrée) diagonale dont tous les éléments de la diagonale valent 1 est appelée matrice unité ou matrice identité. On la note I_n ou seulement I s'il n'y a pas d'ambiguïté.*
- *Une matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée matrice nulle.*
- *Une matrice $n \times 1$ est appelée matrice colonne (ou vecteur colonne)*

- *Une matrice $1 \times p$ est appelée matrice ligne (ou vecteur ligne)*

Exemples. Dans la matrice carrée suivante, la diagonale est en rouge: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure. La matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité I_4. La matrice $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne, et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

3.2. **Opérations sur les matrices.**

DÉFINITION 3.3 (Somme). *Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices $n \times p$. Alors la matrice $C = A + B$ est une matrice $n \times p$ obtenue en sommant terme à terme chaque coefficient des matrices A et B:*

$$A + B = C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 3.4 (Produit par un réel (ou un complexe)). *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, la matrice λA est la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de la matrice A par λ. La matrice λA a donc pour coefficients $(\lambda a_{i,j})$.*

REMARQUE. *On ne peut pas additionner deux matrices qui n'auraient pas le même nombre de lignes ou de colonnes.*

Si A est une matrice $n \times p$ et si 0 est la matrice nulle $n \times p$, alors $A + 0 = 0 + A = A$.

Grâce au produit d'une matrice par un scalaire (réel ou complexe), l'ensemble des matrices $\mathfrak{M}_{n,p}$ est un espace vectoriel. Il vérifie donc toutes les propriétés de la proposition 2.3. En particulier, l'opposé $-A$ d'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathfrak{M}_{n,p}$ est dans $\mathfrak{M}_{n,p}$, et a pour coefficients $(-a_{i,j})$.

On définit ensuite le produit de matrices. La définition ci-dessous est utile pour des raisonnements abstraits, que nous éviterons pour cette année. C'est par un exemple que vous comprendrez mieux comment se fait le produit de matrices.

DÉFINITION 3.5 (Produit de matrices). *Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,\ell}$. Alors la matrice $C = AB$ a ses coefficients $c_{i,j}$ qui sont obtenus, pour tout $i \in \{1, \cdots n\}$ pour tout $j \in \{1, \cdots, \ell\}$, par*

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} \end{aligned}$$

REMARQUE. *i) ⚠ Notez bien que les deux matrices A et B ne sont pas nécessairement dans les mêmes ensembles de matrices, mais que le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.*
ii) ⚠ Les matrices ne vérifient en général pas la propriété de commutation. Cela signifie qu'en général $AB \neq BA$. Vous remarquerez d'ailleurs que l'un des deux produits peut être bien défini, alors que l'autre ne l'est pas forcément, à cause du nombre de lignes et de colonnes de A et B.

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,4}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \\ 9 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,3}$; Alors, la matrice $C = AB$ est dans $\mathfrak{M}_{2,3}$ et:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \\ 9 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & c_{2,3} \end{pmatrix} \end{array}$$

où $c_{2,3} = 2 \times 9 \ + \ 5 \times 4 \ + \ 1 \times 5 \ + \ (-1) \times 2 = 41$. Le calcul des autres coefficients donne $C = \begin{pmatrix} 40 & 3 & 40 \\ 18 & 5 & 41 \end{pmatrix}$.

On ne peut pas calculer BA.

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = I_3$ la matrice identité. Calculer AB et BA, puis IA, IB, AI et BI.

Définition 3.6 (Transposition). *Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}$, alors sa matrice transposée, notée ${}^tA$ est dans $\mathfrak{M}_{p,n}$ et ses coefficients sont obtenus en échangeant le rôle du numéro de ligne et du numéro de colonne. La matrice ${}^tA = (\alpha_{i,j})$ vérifie donc $\alpha_{i,j} = a_{j,i}$*

Exemple. La matrice transposée de la matrice A de l'exemple ci-dessus est: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.7 (Propriétés du produit de matrices).

(1) $A(BC) = (AB)C$. C'est l'associativité du produit de matrices.
(2) $A(B+C) = AB + AC$. C'est la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

3.3. **Inverse d'une matrice et méthode de calcul.**

Définition 3.8 (Inverse d'une matrice). *Soit $A \in \mathfrak{M}_n$ une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n$ telle que $AB = BA = I_n$, alors on dit que A est inversible et son inverse est B. On note alors A^{-1}l'inverse de la matrice A.*

Remarque. *i) On ne parlera pas d'inverse pour une matrice qui n'est pas carrée.*
ii) Si A est inversible, alors $(A^{-1})^{-1} = A$.
iii) Les matrices carrées ne sont pas toutes inversibles. On peut par exemple montrer que $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. On verra dans le paragraphe suivant un critère permettant de montrer qu'une matrice est inversible ou pas.
iv) L'inverse d'une matrice A, s'il existe, est unique.

Proposition 3.9. *Soient A et B deux matrices carrées suposées inversibles. Alors AB est inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Méthode de Gauss-Jordan d'inversion des matrices. Dans ce qui suit, nous allons voir une méthode pour inverser une matrice, basée sur la méthode du pivot de Gauss. Il existe d'autres méthodes (en particulier à l'aide du déterminant). Nous n'aurons pas le temps de les voir.

La méthode de calcul de l'inverse d'une matrice A consiste à écrire côte à côte la matrice A que l'on doit inverser et la matrice unité. On écrit $(A \mid I)$. C'est ce que l'on appelle la matrice augmentée. On effectue ensuite sur les lignes de A les opérations vues dans la définition 1.8 (et seulement ce type d'opérations) pour transformer A en la matrice identité. Pour chaque opération faite sur les lignes de A, on effectue la même opération sur les lignes de la matrice à droite de A. À la fin, quand A est devenue I, alors I est devenue A^{-1}. La stratégie consiste d'abord à faire les mêmes opérations que pour le pivot de Gauss, i.e., on cherche à obtenir une matrice triangulaire.

Voici un exemple de calcul d'inverse de matrice par cette méthode. À chaque étape, on note l'opération sur les lignes qui sera effectuée à l'étape suivante.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \longrightarrow L_3 + L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2 \quad \text{puis } L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3/2 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \longrightarrow -\frac{1}{2}L_3 \quad \text{puis } L_2 \longrightarrow L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right) \qquad L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right)$$

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ -1/2 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Applicaton du calcul d'inverse de matrice. Une application simple du calcul de l'inverse d'une matrice est pour la résolution de systèmes linéaires de n équations à n inconnues. En effet, tout système linéaire de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ avec second membre $b_1, b_2, \cdots, b_n$ peut se réécrire sous la forme $AX = B$ où X et B sont les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Si la matrice A est inversible, on a alors un seul n-uplet solution donné par $X = A^{-1}B$. Si la matrice A n'est pas inversible, on a alors soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

Exemple. Trouver l'ensemble des solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & & = & -2 \\ & 2x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 12 \end{array} \right.$$

Ce système se réécrit $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Le calcul de A^{-1} donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ -1/2 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$ donc, il existe un unique triplet solution du système:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ -1/2 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3.4. **Déterminant de matrice carrée - Méthode de calcul de déterminants.**

À toute matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n$, on peut associer un unique nombre, appelé déterminant, que l'on notera $\det(A)$ ou $|A|$.

La définition mathématique permet, comme il se doit, de caractériser de façon unique le déterminant. Cependant, cette définition ne donne pas directement une méthode de calcul. C'est pourquoi nous allons ci-dessous donner directement les méthodes permettant de calculer un déterminant de matrices carrées.

Définition 3.10 (Déterminants 1×1 et 2×2).
i) Soit $A \in \mathfrak{M}_1$ une matrice carrée d'ordre 1 *(ne contenant donc qu'un seul coefficient. $A = (a_{11})$. Alors,*

$$\det(A) = |A| = a_{11}.$$

ii) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2$ une matrice d'ordre 2*. Alors*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Proposition 3.11. *Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ou supérieure d'ordre n est égal au produit de ses éléments diagonaux. C'est vrai aussi pour une matrice diagonale.*

Exemple. On a $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 6 \times 3 \times 1 = 36.$

Définition 3.12 (sous-déterminants). *Soit $A \in \mathfrak{M}_n$ une matrice carrée d'ordre n. On dira que B est une sous-matrice de A si elle est obtenue en enlevant des lignes et/ou des colonnes à A.*

Si $A \in \mathfrak{M}_n$, on notera $A^*_{ij}* \in \mathfrak{M}_{n-1}$ la sous-matrice de A à qui on a ôté la ligne i et la colonne j.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ alors $A^*_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

Définition 3.13 (Déterminants $n \times n$). *Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n$ une matrice carrée d'ordre n. Alors*

$$\det(A) = a_{1,1}|A^*_{11}| - a_{1,2}|A^*_{12}| + a_{1,3}|A^*_{13}| + \cdots + (-1)^n|A^*_{1n}|.$$

⚠ *Notez bien l'alternance des signes + et − dans cette formule.*

On a effectué ici ce que l'on appelle un développement par rapport à la première ligne de A.

Cette définition permet de ramener le calcul d'un déterminant d'ordre n au calcul de n déterminants d'ordre $n-1$. Par exemple, on calcule un déterminant d'ordre 3 à l'aide de 3 déterminants d'ordre 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times 10 + 1 \times 20 + 6 \times (-2) = 38$$

Proposition 3.14. *On peut effectuer le calcul d'un déterminant $n \times n$ en développant par rapport à une autre ligne que la première ligne. La formule est similaire. Il faut toutefois faire attention à l'alternance des signes + et −. Si on développe par rapport à une ligne impaire (comme la première, la troisième, etc.), on commence par un "+", et on alterne. Si on développe par rapport à une ligne paire (la deuxième, la quatrième, etc.), on commence alors par le signe "−", et on alterne.*

Ainsi, soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n$ *une matrice carrée d'ordre* n.
Alors en développant par rapport à la i*-ème ligne, on obtient:*

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i,1}|A^*_{i1}| - (-1)^{i+1} a_{i,2}|A^*_{i2}| + (-1)^{i+1} a_{i,3}|A^*_{i3}| + \cdots + (-1)^n (-1)^{i+1} a_{i,n}|A^*_{i,n}|.$$

Voyons tout de suite ce que cela donne sur un exemple. On reprend la matrice précédente, mais on développe cette fois par rapport à la deuxième ligne. Faites bien attention. Les coefficients choisis changent, les signes changent, mais aussi les sous-matrices associées changent.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -4 \times \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4)\times(-5) + 2\times(15-6) = 38$$

On retrouve bien entendu la même valeur du déterminant.

Proposition 3.15. *On peut effectuer le calcul d'un déterminant* $n \times n$ *en développant par rapport à une colonne. Là encore, la formule est similaire au cas où on développe par rapport à une ligne. Si on développe par rapport à une colonne impaire (la première, la troisième, etc.), on commence par un "+", et on alterne. Si on développe par rapport à une colonne paire (la deuxième, la quatrième, etc.), on commence alors par le signe "−", et on alterne.*

Ainsi, soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n$ *une matrice carrée d'ordre* n.
Alors en développant par rapport à la j*-ème colonne, on obtient:*

$$\det(A) = (-1)^{j+1} a_{1,j}|A^*_{1j}| - (-1)^{j+1} a_{2,j}|A^*_{2j}| + (-1)^{j+1} a_{3,j}|A^*_{3j}| + \cdots + (-1)^n (-1)^{j+1} a_{n,j}|A^*_{nj}|.$$

Reprenons la matrice précédente, et développons par rapport à la 3ème colonne.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times (-2) + 5 \times 10 = 38$$

Une dernière série de propriétés utiles pour le calcul de déterminant.

Proposition 3.16. *Soit* A *et* B *deux matrices carrées de* $\mathfrak{M}_n$.

(1) Si on intervertit deux lignes de A*, on change son déterminant en son opposé.*

(2) *Si on intervertit deux colonnes de A, on change son déterminant en son opposé.*
(3) *Si on remplace une ligne de A par elle-même plus une combinaison linéaire des autres lignes, on ne change pas son déterminant.*
(4) *Si on remplace une colonne de A par elle-même plus une combinaison linéaire des autres colonnes, on ne change pas son déterminant.*
(5) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathfrak{M}_n$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n A$.*
(6) *Si on multiplie une ligne (ou une colonne) de A par λ, alors on multiplie son déterminant par λ.*
(7) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
(8) *Si A a deux lignes identiques, alors $\det(A) = 0$.*
(9) *Si une ligne de A est combinaison linéaire des autres lignes, alors $\det(A) = 0$.*
(10) *Si A a deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.*
(11) *Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det(A) = 0$.*
(12) *Le déterminant d'une matrice et de sa transposée son égaux: $\det(A) = \det({}^tA)$.*

Remarque. ⚠ *En général on a $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.*

Exemples. Appliquons quelques-unes des propriétés ci-dessus.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{propriété (1).}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(on a fait } L_1 \longrightarrow L_1 - 3L_3 \text{ et propriété (3))} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & -20 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(on a fait } L_2 \longrightarrow L_2 - 4L_3 \text{ et propriété (3))} \\
&= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 2 & -20 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la 1ère colonne)} \\
&= -1 \times (-20) - 2 \times (-9) = 38.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 30 & -1 & 6 \\ 40 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 10\times 3 & -1 & -9 \\ 10\times 4 & 2 & 0 \\ 10\times 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(propriété (6))} \\
&= 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & -9 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(propriété (6))} \\
&= 10 \times 38 = 380.
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 34 & 72 & 60 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(on remarque que } L_3 = 10L_1 + L_2 \text{ et propriété (10))}$$

Voici un théorème important sur l'inversibilité d'une matrice.

Théorème 3.17. *Soit $A \in \mathfrak{M}_n$. Alors:*

$$A \textit{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

La proposition suivante donne une propriété simple pour montrer qu'une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base.

Proposition 3.18. *Soit $(f_1, f_2, \cdots f_n)$, n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors, $(f_1, f_2, \cdots f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si* $\det(f_1, f_2, \cdots f_n) \neq 0$.

4. Fiche de cours: Application linéaires

4.1. Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 4.1 (Application). *Soient E et F deux ensembles quelconques. On appelle application de E vers F, une fonction qui a tout élément de E associe un élément de F.*

Exemples. i) $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin(x)$.
ii) $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $g_1(x) = 3x$. Si on prend $g_2(x) = \sqrt{x}$, ce n'est pas une application sur E (seulement une fonction), car elle n'est pas définie sur tout E.
iii) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ et $h((x_1, x_2)) = 3x_1x_2 + {x_1}^2 \exp x_2$.
iv) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ et $h((x, y)) = 3y - 4x$.
v) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ et $j(\ (x_1,\ x_2,\ x_3)\ ) = (x_1 - 5x_2,\ x_3 + 9x_2 - x_4)$.

Définition 4.2 (Application linéaire). *Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ si*

(a) *Pour tout u et v dans $\mathbb{R}^n$, on a $f(u + v) = f(u) + f(v)$.*
(b) *Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.*

L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Exemple. Dans les exemples d'applications i) à v) ci-dessus, dire celles qui sont des applications linéaires et celles qui ne le sont pas.

Proposition 4.3. *Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, alors on a*

(1) $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$.
(2) Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $f(-u) = -f(u)$.

où $0_{\mathbb{R}^n}$ est le vecteur nul $\underbrace{(0, 0, \cdots, 0)}_{n \text{ fois}}$ de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathbb{R}^p}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 4.4. *Si f et g sont deux applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, alors*

(1) $f + g$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$
(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
(3) Si f est bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, alors son application réciproque est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

4.2. Généralisation au cas E et F espaces vectoriels quelconques.

La définition d'application linéaire sur des espaces vectoriels quelconques est similaire à celle donnée sur les espaces $\mathbb{R}^n$. On a donc

Définition 4.5. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application de E dans F. On dit que f est une application linéaire de E dans F si*

(a) *Pour tout u et v dans E, on a $f(u+v) = f(u) + f(v)$.*
(b) *Pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.*

L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Remarque. *i) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On peut montrer que E est un espace vectoriel. Avec les définitions vues auparavant (voir Définition 2.15), vous pouvez par exemple montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

L'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, telle que $f(P) = P'$, est une application linéaire.

ii) Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices rectagulaires $n \times p$. On peut montrer que E est un espace vectoriel. L'application de E dans E qui à une matrice associe sa transposée est une application linéaire.

4.3. **Image - Noyau - Rang.**

Définition 4.6 (Image d'une application linéaire). *Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F. On appelle ensemble image de f, l'ensemble noté $\mathrm{Im}(f)$ défini par*

$$\mathrm{Im}(f) = \{\ f(u) \mid u \in E\ \}.$$

Remarque. *i) En d'autres termes, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble de toutes les images possibles $f(u)$ lorsque u parcourt E.*
ii) ⚠Notez bien que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble de F.

Proposition 4.7. *Soit f une application linéaire de E vers F. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. De plus, si E est de dimension finie p et que $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base de E, alors*

$$\mathrm{Im}(f) \;=\; \mathrm{Vect}\left(\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)\}\right),$$

c'est à dire que $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par la famille de vecteurs $\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)\}$.

Définition 4.8 (Rang d'une application linéaire). *Soit f une application linéaire de E vers F. On appelle rang de l'application linéaire f, que l'on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$:*

$$\mathrm{rg}(f) \;=\; \dim(\mathrm{Im(f)}).$$

Proposition 4.9. *Soit f une application linéaire de E vers F.*
i) On a alors les deux inégalités suivantes pour le rang de f:

$$\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$$

ii) Si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors le rang de f est égal au nombre maximal de vecteurs de $\{f(e_1), f(e_2), \cdots f(e_p)\}$ linéairement indépendants.

Remarque. *Nous verrons dans la proposition 4.23 un résultat très utile pour déterminer le rang d'une application linéaire. Ce sera essentiellement ce résultat que nous utiliserons pour déterminer le rang d'une application linéaire.*

Définition 4.10 (Noyau d'une application linéaire). *Soit f une application linéaire de E vers F. On appelle noyau de f, que l'on note* $\mathrm{Ker}(f)$, *l'ensemble de tous les vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul:*

$$\mathrm{Ker}(f) \;=\; \{\ u \in E \mid f(u) = 0_F\ \}.$$

Remarque. ⚠*L'ensemble* $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-ensemble de E.*

Proposition 4.11. *Soit f une application linéaire de E vers F. Alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

On rappelle la définition d'injectivité pour une application.

Définition 4.12. *Une application (pas nécessairement linéaire) d'un ensemble X vers un ensemble Y est injective si chaque élément de l'ensemble d'arrivée Y a au plus un antécédent dans X: pour tout $y \in Y$, il existe au plus un élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$.*

Le théorème suivant donne une caractérisation simple de l'injectivité dans le cas d'une application linéaire.

Théorème 4.13. *Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F. Alors f est injective si et seulement si son noyau est réduit au seul vecteur nul:*

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Théorème 4.14 (Théorème du rang). *Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie vers un espace vectoriel F alors*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

4.4. **Représentation d'une application linéaire par une matrice.** Dans ce paragraphe, nous allons voir qu'une application linéaire de E vers F peut être représentée par une matrice dès qu'on se donne une base de l'espace vectoriel de départ E et une base de l'espace vectoriel d'arrivée F. Nous allons voir aussi que si l'on se donne une matrice, on peut lui associer une application linéaire.

4.4.1. *Matrice d'une application linéaire.*

DÉFINITION 4.15. *La matrice de l'application linéaire g de E vers F, où E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ et F est muni d'une base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est donnée par la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les vecteurs $g(e_j)$ exprimés en fonction des vecteurs f_i:*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} g(e_1) & g(e_2) & \cdots & g(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \overset{notation}{=} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$$

REMARQUE. *Les coefficients de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$ dépendent du choix des matrice $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Cela signifie qu'à une application linéaire donnée g, correspond plusieurs matrices.*

Exemple: Soit l'application linéaire g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ -3x_2 + 2x_3)$. Si on écrit les vecteurs en colonne, cela donne $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$.

Prenons comme base de $\mathbb{R}^3$ la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et pour $\mathbb{R}^2$ la base canonique $\mathcal{B}' = (f_1, f_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On a:

$$g(e_1) = g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_1 = 1\, f_1 + 0\, f_2$$

$$g(e_2) = g(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2f_1 - 3f_2$$

$$g(e_3) = g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1f_1 + 2f_2$$

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$ est donc:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque. *Réciproquement, si on se donne une matrice dans $\mathcal{M}_{n,p}$, on peut lui associer une application linéaire. Pour cela, il suffit de considérer que c'est la matrice de l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ munis de leur base canonique respective.*

Par exemple, à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, on associe l'application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g((1,0)) = (1,2,0)$ et $g((0,1)) = (4,5,3)$.
On a alors, pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} g(x) = g((x_1,x_2)) &= g\big(x_1(1,0) \ + \ x_2(0,1)\big) \\ &= x_1 g((1,0)) + x_2 g((0,1)) = x_1(1,2,0) + x_2(4,5,3) \\ &= (x_1, 2x_1, 0) + (4x_2, 5x_2, 3x_2) \\ &= (x_1 + 4x_2,\ 2x_1 + 5x_2,\ 3x_2) \end{aligned}$$

On a donc obtenu: $g((x_1,x_2)) = (x_1 + 4x_2,\ 2x_1 + 5x_2,\ 3x_2)$.

Plus simplement, on peut écrire $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et on calcule $AX = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$, qui donne l'expression de $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix})$ écrite en colonne.

4.4.2. *Opérations sur les applications linéaires.*

Proposition 4.16. *Soient f et g deux applications linéaires de E muni de la base $\mathcal{B}$ vers F muni de la base $\mathcal{B}'$. Alors*
i) $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$.

Cela signifie que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étant données comme bases respectives de E et F, la matrice de $f+g$ est égale à la matrice de f plus la matrice de g.
ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Proposition 4.17 (Matrice de la composée de deux applications linéaires). *Soient $f : E \to F$ avec E muni de la base $\mathcal{B}$ et F muni de la base $\mathcal{B}'$, et $g : F \to G$, avec F muni de la base $\mathcal{B}'$ et G muni de la base $\mathcal{B}''$. Alors*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)\ \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, 2x_2)$ et $g(y_1, y_2, y_3) = (2y_1 - y_2, 3y_1 + y_2 + 2y_3)$. En prenant les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice de g est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice de $g \circ f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $\mathbb{R}^2$ munis de la base canonique, est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 4.18. *Soit f une application linéaire de E dans E, où E est muni d'une base $\mathcal{B}$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f))^k$$

THÉORÈME 4.19 (Matrice et inverse d'application linéaire). *Soient E et F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Alors*

$$f \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est inversible}$$

De plus, lorsque f est bijective, son inverse $f^{-1} : F \to E$ est une application linéaire, et sa matrice, de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ vérifie

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1}$$

REMARQUE. *i) Pour que f soit inversible, il faut déjà que $\dim(E) = \dim(F)$. C'est une conséquence du théorème du rang.*
ii) D'après les propriétés sur les déterminants, f est inversible si et seulement si $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)) \neq 0$.

4.5. **Changements de base.**

DÉFINITION 4.20. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un même espace vectoriel E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple: Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ avec $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a $f_1 = -1e_1 + 2e_2$ et $f_2 = 1e_1 + 4e_2$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est donc

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposition 4.21. *La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est inversible, et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$:*

$$(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

Exercice: Vérifer, avec les vecteurs e_1, e_2, f_1 et f_2 de l'exemple précédent que l'on a $e_1 = -\frac{2}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2$ et $e_2 = \frac{1}{6}f_1 + \frac{1}{6}f_2$. En déduire $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et vérifier que l'on a bien $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$, c'est à dire que $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = I$

Théorème 4.22 (Changement de base). *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F.*

Soit $P = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ vers $\mathcal{B}'_E$ et soit $Q = P_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ vers $\mathcal{B}'_F$.

Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$.

Alors

$$B = Q^{-1}AP.$$

Exemple: Pour $E = F = \mathbb{R}^3$, soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ -5x_1 + 3x_2 + 5x_3,\ x_1 + 2x_2)$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère une autre base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Si A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et B est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, on a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B = P^{-1}AP$$

avec $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et P^{-1} inverse de P et aussi matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$. Le calcul donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve alors:

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.5.1. *Retour sur le rang d'une application linéaire.* Le lien entre matrice et application linéaire et les propriétés du déterminant d'une matrice nous permet de calculer le rang d'une application linéaire à partir du calcul de déterminants. On a la proposition suivante:

PROPOSITION 4.23. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On munit respectivement $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.*

Le rang de f est égal au plus grand ordre possible $k \times k$ d'une sous-matrice (carrée $k \times k$) de A de déterminant non nul.

Exemple: Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de matrice (dans les bases canoniques) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les plus grandes sous-matrices sont d'ordre 3×3, ce qui implique déjà que $\mathrm{rg}(f) \leq 3$. On va donc regarder les sous-matrices 3×3 de A. Une sous matrice possible est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul du déterminant de cette matrice donne zéro. On ne peut pas encore conclure que $\mathrm{rg}(f) < 3$. Il faut vérifier avec toutes les sous-matrices d'ordre 3 jusqu'à en trouver une, si possible, de déterminant non nul. C'est seulement si toutes les sous-matrices 3×3 ont un déterminant nul, qu'on passera aux matrices 2×2.

La sous-matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 3. On peut donc conclure que $\mathrm{rg}(f) \geq 3$. Comme par ailleurs $\mathrm{rg}(f) \leq 3$, cela donne $\mathrm{rg}(f) = 3$.