UNIVERSITÉ
DU
SUD TOULON-VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

Licence Sciences et Techniques 1ère année. (2007-08)
Mention Info

Méthodologie[1]

1. Assertions, prédicats, connecteurs logiques

Exercice 1. Dire si les phrases suivantes sont des prédicats; si c'est le cas, écrire leur négation.
$P =$"Toute personne dans cette salle possède un téléphone portable".
$Q =$"Pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe y dans $\mathbb{R}$ tel que $x = 2y$.

Exercice 2. Ecrire les tables de vérité suivantes:
- non(P) et Q
- non(P et Q)
- non(P) ou non(Q); comparer cette table avec celle de non(P et Q).
- non(P) ou Q

Exercice 3. Soient les prédicats définis par $P(x) =$"$x \leq 1$" et $Q(x) =$"$x \geq 2$". Donner les valeurs de x pour lesquelles
- ($P(x)$ et $Q(x)$) est vrai
- ($P(x)$ et $Q(x)$) est faux
- ($P(x)$ ou $Q(x)$) est vrai
- ($P(x)$ ou $Q(x)$) est faux

Exercice 4. Montrer que (($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$)) est logiquement équivalent à $P \Leftrightarrow Q$.

Exercice 5. Montrer que ($P \Rightarrow Q$) est logiquement équivalent à (non(P) ou Q).

Exercice 6. "$\forall n \in \mathbb{N},\ (n-3)n > 0$" est-elle une assertion? Si oui, est-elle vraie ou fausse?

Exercice 7. Ecrire avec des quantificateurs:
"Tout réel positif ou nul, inférieur ou égal à un, est supérieur ou égal à son carré". Est-ce une assertion vraie ou fausse? Ecrire la négation de cette assertion.

[1]**Responsble pédagogique:** J.-M. Barbaroux, barbarou@univ-tln.fr

Exercice 8. En utilisant son équivalent logique vu dans l'exercice 5 écrire la négation de $P \Rightarrow Q$.

Exercice 9. Soit E un ensemble quelconque et soient A et B deux sous-ensemble de E. On rappelle que

"A est inclus dans B si pour tout élément de E qui est dans A, il est aussi dans B"; on note $A \subset B$.

Ecrire avec des quantificateurs $A \subset B$. En déduire une écriture avec les quantificateurs de $A \not\subset B$.

Montrer $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.

Exercice 10. Pour chacun des énoncés suivants, écrire sa négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux.

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 1$
(2) $\forall n \in \mathbb{N}\ n^2 + n + 1 \leq n^3$
(3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ n \geq x$
(4) $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ n > p \Rightarrow n + p > 2p$
(5) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists p \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ |x - 3| < \frac{1}{p} \Rightarrow |x^2 - 9| < \frac{1}{n}$
(6) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists p \in \mathbb{N}^*\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ |y - x| < \frac{1}{p} \Rightarrow |y^2 - x^2| < \frac{1}{n}$

Exercice 11. (4 divise n) est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que (2 divise n)?

(3 divise n) est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que (9 divise n)?

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Pour chacune des assertions (1) à (4) suivantes, associer celle des phrases (a) à (d) qui signifie la même chose.

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$
(2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$
(3) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$
(4) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

(a) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $+\infty$."
(b) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée supérieurement"
(c) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $-\infty$."
(d) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par M."

Exercice 13. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Que signifient les assertions suivantes,

- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$
- $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

2. Techniques de démonstration

Exercice 14. (preuve directe)

Montrer que le complémentaire de l'intersection de deux sous-ensembles est la réunion des complémentaires, i.e., en notant par $\overline{C}$ le complémentaire d'un ensemble C, montrer que pour tous ensembles A et B, on a

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Montrer que le complémentaire de la réunion de deux ensembles est l'intersection des complémentaires de ces ensembles.

Exercice 15. Déterminer l'intersection et la réunion des ensembles

$$E = \{a, b, c, d\} \quad \text{et} \quad F = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Que constate-t-on? Peut-on géneraliser le résultat obtenu? S'agit-il d'une équivalence ou seulement d'une implication? (on justifiera rigoureusement sa réponse à l'aide d'une preuve).

Exercice 16. *Rappel: Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est injective si tout élément $y \in F$ admet au plus un antécédent $x \in E$ par f (i.e., tel que $f(x) = y$).*

En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer la propriété suivante:

$$f \text{ injective } \Rightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (f(x) = f(y) \Rightarrow (x = y)\big)$$

(on utilisera l'exercice 8 pour nier l'implication)

Exercice 17. A l'aide d'un raisonnement par contraposée, montrer l'assertion suivante:

$$n^2 \text{ pair } \Rightarrow \ n \text{ pair}$$

Essayez de le montrer par une preuve directe.

Exercice 18. A l'aide d'un raisonnement par contraposée, montrer

$$(\forall \epsilon > 0\ |x| < \epsilon) \ \Rightarrow \ x = 0$$

Exercice 19. Soit $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $B = \mathcal{C}((1,1);1)$ le disque dans R^2 de centre le point de coordonnées $(1,1)$ et de rayon 1. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que

$$B \subset A$$

Exercice 20. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que si x est un entier non carré d'entier, alors x n'est pas le carré d'un rationnel.

Exercice 21. *Rappel: on dit qu'une application f de E dans F est surjective si pour tout $y \in F$, il existe au moins un élément x dans E tel que $f(x) = y$.*

Démontrer que

$$(f \circ g) \text{ surjective } \Rightarrow \ f \text{ surjective}$$

(on utilisera deux techniques de démonstration différentes)

Exercice 22. A l'aide d'un raisonnement par contre-exemple, démontrer que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Exercice 23. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$. A l'aide d'un raisonnement par contre-exemple, démontrer $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$

Exercice 24. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective; montrer qu'elle n'est pas surjective.

Exercice 25. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 26. Soit la suite $u_n = \frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots+(\frac{1}{2})^n$. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$u_n = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

Exercice 27. Soient les sommes

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 + 2 + 3 + \ldots + n \\ S'_n & = & 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \\ S''_n & = & 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) \end{array}$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exprimer S'_n en fonction de S_n. En déduire une expression simple pour S'_n et S''_n.

Exercice 28. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Pour $n = 1, ...7$, calculer u_n, puis calculer $u_n - 1$. Que constatez-vous? Trouver une expression de u_n en fonction de n et la démontrer à l'aide d'une récurrence double.

3. Techniques de démonstration (suite)

Exercice 29. Un ensemble E de points est dit convexe si le segment joignant deux points quelconques de E est contenu dans E. Montrer que l'intersection de deux ensembles convexes est convexe.

Exercice 30. i) Expliquez ce qu'est un raisonnement par contraposée.

ii) On rappelle le théorème de Phytagore:

On considère un triangle ABC non equilatéral, dont le plus grand côté est BC.

$$ABC \text{ est un triangle rectangle } \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

On considère maintenant un triangle dont les côtés ont pour longueurs respectives $3cm$, $4cm$ et $6cm$. Est-ce que ce triangle est rectangle?

Exercice 31. Montrer que l'assertion suivante est vraie.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n^2 \text{ impair } \Rightarrow \ n \text{ impair})$$

Exercice 32. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, et $l \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Rightarrow (u_n) \text{ est majorée.}$$

Rappel: La suite (u_n) est bornée si $\exists M \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

Exercice 33. Montrer que si a et b sont des rationnels tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.

Exercice 34. Montrer qu'il n'existe pas de rationnels a et b tels que

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$$

Exercice 35. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 + 1 \end{array}$$

i) Montrer que f n'est pas injective.
ii) Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice 36. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \leq n^n$.

Exercice 37. Montrez par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

Exercice 38. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_0 = a, \ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_0 = b, \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

i) Montrer que les suites sont à valeurs positives et que pour tout entier n on a $u_n \leq v_n$
ii) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante majorée et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante minorée.
iii) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.