UNIVERSITÉ
DU
SUD TOULON-VAR
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
L2 MASS (2007-08)

M46 : Probabilités - Statistiques inférentielles

J.-M. Barbaroux. *email :* barbarou@univ-tln.fr

Table des matières

1. **Probabilités - Propriétés générales**

Exercice 1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère A et B deux événements de $\mathcal{F}$. Montrer que si $A \subset B$, alors

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \ ,$$

où $B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}$.

Exercice 1.2. Soient A, B et C 3 événements *incompatibles* (i.e., les ensembles A, B et C sont 2 à 2 disjoints), tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \ .$$

i) Calculer la probabilité qu'au moins un des événements se réalise.
ii) Calculer $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$, $\mathbb{P}(B \setminus A)$.

Exercice 1.3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)/2, \quad \mathbb{P}(\overline{B}) = 0.3 \ \text{ et } \ \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0.4$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 1.4. Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit $\mathcal{V}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Montrer que $\mathcal{V}_A$ est une tribu sur A.

Exercice 1.5. Soit Ω un ensemble non vide, et soit $A \subset \Omega$ tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$. Construire la tribu engendrée par A (i.e., la plus petite tribu contenant A).

Exercice 1.6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
i)Rappeler la propriété de σ-additivité pour $\mathbb{P}$.
ii) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{A}$, i.e., une suite d'ensembles mesurables de Ω telle que $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Montrer

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cup_n A_n) \ .$$

iii) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$. Montrer

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\cap_n B_n) \ .$$

2. **Variables aléatoires discrètes**

Exercice 2.1. Supposons qu'un tricheur possède un dé tel que : $\mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(6) = 1/4$ et $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = 1/8$.
i) Est-ce théoriquement possible ?
ii) Il lance 2 fois le dé. Quelle est la probabilité que la somme des résultats soit strictement supérieure à 10 dans chacun des cas suivants (les deux jets sont supposés indépendants) :
cas 1 : sachant que l'un des résultats est 6.
cas 2 : sachant qu'il a obtenu un 6 lors du premier lancer.

Indications : On décrira l'espace de toutes les réalisations, leurs probabilités respectives (ou au moins celles concernées dans les cas 1 et 2). Pour le cas 2 on considèrera les événements A="résultat > 10" et B="premier tirage est un 6".

Exercice 2.2. On lance deux dés parfaitement symétriques. Soient X et Y les points obtenus sur chacun des deux dés. On pose $Z = |X - Y|$ et $T = \max(X, Y)$. Donner la loi du couple (Z, T) et préciser les lois marginales Z et T. Calculer $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(T)$ et $\mathrm{Cov}(Z, T)$.

Exercice 2.3. Lors d'une épreuve de type Q.C.M., où les étudiants ont le choix entre trois réponses "a b et c", pour 10 questions successives chacune notée sur un point, un étudiant répond au hasard à toutes les questions ; Soit X la variable aléatoire correspondant à la note qu'il obtient ainsi (1 point par bonne réponse et 0 sinon).

Donner la loi de X. Calculer $\mathbb{P}[X \leq 2]$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 2.4. Le responsable d'un comité d'entreprise a effectué une compilation du nombre d'accidents de travail qui se sont produits depuis deux ans dans l'usine. Ceci a permit d'établir que le taux moyen d'accidents de travail a été de $1,6$ accidents par jour.
i) En admettant que le nombre X d'accidents de travail en une journée obéit à la loi de Poisson, quelle est l'expression qui permettrait de calculer la probabilité d'observer x accidents par jour ?
ii) Quel est l'écart type de la variable aléatoire observée ?
iii) Quelle est la probabilité d'observer plus de deux accidents par jour ?
iv) Calculer la probabilité d'avoir un nombre d'accidents compris dans l'intervalle $[\mathbb{E}(X) - \sigma(X), \mathbb{E}(X) + \sigma(X)]$.

Exercice 2.5. Dans un jeu télévisé, chaque candidat doit répondre à 3 questions tirées au sort parmi 8 questions, dont 3 questions d'histoire, 2 questions littéraires, 3 questions scientifiques. Soient X le nombre des questions scientifiques sorties et Y le nombre des questions littéraires sorties.
i) Dresser le tableau de la loi du couple (X, Y).
ii) En déduire les lois marginales. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 2.6. On considère deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Leur loi de probabilité est donnée par le tableau suivant

X \ Y	-1	0	1
1	0.09	0.02	0.09
2	0.1	0.3	0.1
3	0.01	0.08	0.21

i) Déterminer les lois marginales de X et Y, puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. Les lois X et Y sont-elles indépendantes ?
ii) Calculer la loi de probabilité de $T = X + Y$, et vérifier que $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$. Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et en déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
iii) Soient $U = XY$ et $V = \min(X, Y)$. Donner la loi du couple (U, V) et les lois de U et V.

Exercice 2.7. On suppose que le nombre de passages de véhicules au péage de La Ciotat entre 12h et 13h est donné par une variable aléatoire discrète X suivant une loi de Poisson de paramètre m_1 dans le sens Toulon-Marseille et une variable aléatoire discrète Y suivant une loi de Poisson de paramètre m_2 dans le sens Marseille-Toulon. On suppose de plus que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
i) Déterminer la loi du nombre total de passages (quelle que soit la direction prise par les véhicules) en ce point de l'autoroute entre 12h et 13h.
ii) Déterminer la probabilité que sur un nombre total n de passages, il y en ait exactement k dans le sens Toulon-Marseille.

Exercice 2.8. Le temps d'attente en jours pour obtenir un remboursement de la Sécurité Sociale après en avoir fait la demande est donné par une variable aléatoire discrète X qui suit une loi de Pascal de paramètre p :

Probabilité d'attendre j jours $= \mathbb{P}_X(j) = p(1-p)^{j-1}$, $j \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$.

i) Vérifier que $\mathbb{P}_X$ est une loi de probabilité. Calculer $\mathbb{E}(X)$ qui représente le temps d'attente moyen en jours.
Rappel : pour $z \in]0, 1[$ *on a* $\sum_{j=0}^{\infty} z^j = 1/(1-z)$ *et* $\sum_{j=0}^{\infty} j z^{j-1} = 1/(1-z)^2$.
ii) a) On suppose que vous faites une première demande de remboursement, puis, le jour qui suit le premier remboursement, vous faites une deuxième demande de remboursement à votre mutuelle, pour laquelle le temps d'attente est donné par une variable aléatoire discrète Y suivant la même loi que X, et indépendante de X. Calculer la loi de probabilité de $Z = X+Y$ (temps d'attente total des deux remboursements). Calculer $\mathbb{E}(X + Y)$.
b) Calculer la probabilité d'attendre exactement 10 jours pour les deux remboursements, sachant que le premier remboursement mettra au plus 2 jours pour arriver.
iii) On suppose maintenant que vous faites deux demandes simultanées dont les traitements par la Sécurité Sociale sont indépendants. Sachant que les temps d'attente respectifs des deux demandes sont modélisés respectivement par deux variables aléatoires T et U indépendantes qui suivent une même loi, construire :
a) Une variable aléatoire Z_1 (et donc sa loi) qui modélise le temps d'attente des deux remboursements.
b) Une variable aléatoire Z_2 qui modélise le temps d'attente du premier remboursement.
c) Donner les fonctions de répartition de Z_1 et Z_2 en fonction de celles de T et U.

Exercice 2.9. On rappelle les deux formules suivantes :

$$\text{si } 0 < z < 1, \ \sum_{i=n}^{+\infty} z^n = \frac{z^n}{1-z} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)/2$$

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes et suivant une loi géométrique de paramètre $a \in]0, 1[$:

$$\mathbb{P}[X = i] = \mathbb{P}[Y = i] = a(1-a)^{i-1} \ .$$

On considère la v.a.r. définie par $Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) - Y(\omega) & \text{si } X(\omega) > Y(\omega) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

i) Donner, sans la calculer, l'expression de $\mathbb{E}\left((1-a)^Y\right)$.
ii) Déterminer la loi de Z.
Indication. On calculera d'abord $\mathbb{P}[Z=0]$, puis $\mathbb{P}[Z=k]$, $k \in \mathbb{N}^*$ en les exprimant en fonction de $\alpha = \mathbb{E}\left((1-a)^Y\right)$.

Exercice 2.10. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de Poisson. Notons λ_1 et λ_2 les paramètres respectifs des lois de ces deux v.a. discrètes.
i) Démontrer que la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$ est de Poisson d'espérance $\lambda_1 + \lambda_2$.

On Suppose maintenant que $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, et X_i= "le nombre de téléviseurs demandés pour achat au cours d'une journée dans un magasin M_i" ($i = 1$ ou 2).
ii) Quel est le nombre minimum de téléviseurs dont le magasin M_1 doit disposer pour satisfaire la demande d'une journée avec une probabilité supérieure à 90%.
iii) Si les magasins M_1 et M_2 réunissent leurs stocks, quel est le nombre minimum de téléviseurs dont le stock commun doit disposer pour que les deux magasins satisfassent les demandes d'une journée avec une probabilité supérieure à 90%.
iv) Les deux magasins ont-ils interêt à réunir leurs stocks ?

Exercice 2.11. On considère les pièces fabriquées par une machine comme le résultat d'épreuves indépendantes et on admet que toute pièce de la production a la probabilité $q \in]0,1[$ d'être défectueuse.
i) Soit A_r l'événement : "Les $r-1$ premières pièces sont correctes et la r-ième est défectueuse". Calculer $\mathbb{P}(A_r)$.
ii) Calculer $\mathbb{P}\left(\cup_{r=1}^{+\infty} A_r\right)$ et $\mathbb{P}(\overline{A})$ où $A = \cup_{r=1}^{+\infty} A_r$.
iii) Soit $B_{r,s}$ l'événement "les $r-1$ premières pièces sont correctes, la r-ième est défectueuse, les $s-1$ suivantes sont correctes, la $(r+s)$-ième est défectueuse". Calculer $\mathbb{P}(B_{r,s})$.
iv) Soit X la variable aléatoire égale au rang de la première pièce défectueuse ; on note T la variable aléatoire égale au rang de la seconde pièce défectueuse, et Y est la variable aléatoire définie par $Y = T - X$. Montrer que X et Y sont indépendantes et de même loi.
v) Soit Z la variable aléatoire égale au rang de la k-ième pièce défectueuse : $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$. Quelle est l'espérance de Z ?

3. **Intégration**

Exercice 3.1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \ , \quad \text{et} \quad \int_0^1 x^2 \cos x \mathrm{d}x \ .$$

Exercice 3.2. Calculer les intégrales généralisées suivantes :
$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$, $\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $\int_1^\infty \frac{3x-1}{x(4x^2-1)}\mathrm{d}x$

Exercice 3.3. On appelle convolution de deux fonctions f et g, la fonction notée $f*g$ définie par l'intégrale

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y,$$

lorsque cette intégrale a un sens. Calculer la convolution de f et g pour

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 3.4. i) Soit T le triangle délimité par les points de coordonnées $(-1,-1)$, $(0,1)$, et $(1,1)$. Calculer

$$\int_T 8xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

ii) En effectuant un passage en coordonnées polaires (changement de variables), calculer l'intégrale suivante : $\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.
iii) Calculer $\int_D \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est le disque centré à l'origine, et de rayon 1.

Exercice 3.5. On considère la fonction Gamma d'Euler définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} dt.$$

i) Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
ii) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall x > 0$.
iii) Calculer $\Gamma(x)$ pour $x = n$, n entier > 0 et $x = n + \frac{1}{2}$, n entier ≥ 0.

Exercice 3.6. *Intégrales de Wallis*

Pour $n \geq 0$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$.
i)Pour $n \geq 2$, montrer que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
ii) En déduire I_{2p} et I_{2p+1} , pour $p \in N$.
iii) Montrer que, pour $n \geq 0$, $I_n \geq I_{n+1} > 0$ et que pour $p \geq 1$ on a

$$1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} \ .$$

iv) En déduire la convergence et la limite de la suite : $u_n = \left(\dfrac{1\,3\,5\,\cdots\,(2n-1)}{2\,4\,6\,\cdots(2n)}\right)^2 n.$

v) Montrer que $\forall p \geq 0$, $I_{2p+1}^2 \leq \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$.

vi) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. **Variables aléatoires continues**

Exercice 4.1. Lois à densité usuelles

i) *Loi uniforme.*
On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, de densité

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

Montrer que f définit bien une densité. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et la fonction caractéristique g de X.
ii) *Loi normale (ou loi de Laplace-Gauss)* $\mathcal{N}(m,\sigma)$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

Dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$, montrer que f définit bien une densité, puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
iii) *Loi Log-normale.*
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. La variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$ suit alors une loi appelée Log-normale. Considérons le cas particulier $m = 0$ et $\sigma = 1$, et calculer la fonction de répartition $F_Y(x) := \mathbb{P}\{Y \leq x\}$ en fonction de la fonction de répartition de X. En déduire que la densité de Y est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\log^2 x\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[(x)}$.
iv) *Loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$.
Soient $\lambda > 0$ et la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, de densité

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Montrer que f définit bien une densité. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et la fonction génératrice g de X.

Si X suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, montrer que $Y = [X]$ (partie entière de X) suit une loi géométrique, i.e., une loi discrète définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\mathbb{P}\{Y = n\} = pq^n$, où $q := \mathrm{e}^{-\lambda}$. Montrer que la variable aléatoire $U = \mathrm{e}^{-\lambda X}$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$.
v) *Première loi de Laplace.*
Soit une variable aléatoire X qui suit une loi à densité

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Vérifier que f définit bien une densité. Pour $u \in]-1,1[$, montrer que la fonction génératrice g de X vérifie $g(u) = \frac{1}{1-u^2}$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
vi) *Loi de Cauchy.*
Soit une variable aléatoire X qui suit une loi à densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Peut-on calculer $\mathbb{E}(X)$? Soit V une variable aléatoire uniformément distribuée sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et soient $Y = \tan V$, $Z = 1/\tan V$. Calculer $\mathbb{P}\{Y \leq x\}$ et en déduire que Y suit la loi de Cauchy. Montrer de même que Z suit la loi de Cauchy.

vii) *Loi gamma* $\Gamma(p, \lambda)$.
Soient $p > 0$ et $\lambda > 0$. On considère la loi gamma de densité

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(p)} \mathrm{e}^{-\lambda x} (\lambda x)^{p-1} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{p}{\lambda^2}$.

Exercice 4.2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \lambda x^2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i) Déterminer λ pour que f soit une densité de probabilité. Calculer la fonction de répartition.
ii) On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité de probabilité f. Calculer $\mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 3\})$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 4.3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω qui suit la loi $\mathbb{P}$.
Calculer, dans chacun des cas suivants, l'espérance, la variance et la fonction de répartition de X

– $\mathbb{P}$ est une loi à densité f uniforme sur $[-1, 1]$, i.e.,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– $\mathbb{P}$ est une loi à densité g exponentielle de paramètre λ, i.e.,

$$g(x) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 4.4. Une variable aléatoire X suit une loi de densité $p(x) = \dfrac{k}{(x+1)^4}$ pour $x \geq 0$ et $p(x) = 0$ pour $x < 0$, où k est une constante.
i) Déterminer k pour que $p(x)$ soit une densité de probabilité, et déterminer la fonction de répartition de X.
ii) Trouver y tel que $\mathbb{P}(X \leq y) = 7/8$.
iii) Calculer $\mathbb{E}(X + 1)$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$.
iv) Déterminer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 4.5. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f. Donner la loi de probabilité de X^2.

Exercice 4.6. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, \pi/2]$, i.e., X est à densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 2/\pi & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère les variables aléatoires

$$Y = \sin X \qquad \text{et} \qquad Z = \sin(X + \pi)\ .$$

i) Calculer la loi de Y (ou sa densité ou sa fonction de répartition) et l'espérance de Y.
ii) Même question pour Z.

Exercice 4.7. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire $Y = \tan X$. Vérifier que Y suit la loi de Cauchy de densité $\pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$.

Exercice 4.8. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et que Y et Z suivent la loi exponentielle de paramètre 1.
i) Déterminer la loi du couple (Y,Z) et la loi du couple (X,Y).
Indication. On cherche une loi à densité de la forme $f(x,y)$ telle que

$$\mathbb{P}\big((Y,Z) \in [a,b] \times [c,d]\big) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx\right) dy \ .$$

ii) Déterminer la loi de $Y+Z$ puis la loi de $X+Y$.
Indication. On pourra appliquer le résultat suivant : 2 v.a.r. indépendantes dont les lois sont à densité respectivement f_X et f_Y suivent une loi à densité

$$f_{X+Y}(x) = \int f_X(y) f_Y(x-y) dy$$

Exercice 4.9. Deux amis ont rendez-vous à midi ; Des causes de retard indépendantes font que chacun arrive entre 12h et 13h. La probabilité d'arrivée de chacun d'eux dans un intervalle de temps donné étant proportionnelle à la longueur de cet intervalle, quelle est la probabilité que les deux amis se rencontrent si chacun attend au plus 1/4 d'heure. (On pourra construire 2 v.a.r. continues indépendantes X_1 et X_2 qui donnent le temps de retard, et calculer $\mathbb{P}(|X_1 - X_2| < 1/4)$).

Exercice 4.10. Soient X et Y deux variables aléatoires, et h la densité du couple définie par $h(x,y) = \mathrm{e}^{-y}$ si $0 < x < y$ et $h(x,y) = 0$ sinon.
i) Vérifier que h est une densité de probabilité.
ii) Calculer les densités marginales f de X et g de Y.
iii) Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
iv) Calculer $\mathbb{P}\left(\dfrac{X}{Y} \leq z \text{ et } Y \leq y\right)$; en déduire la loi de $\dfrac{X}{Y}$.
v) Est-ce que X/Y et Y sont des variables aléatoires réelles indépendantes ?

5. **Lecture des tables statistiques - Loi normale**

Dans tous les exercices qui suivent, on utilisera les tables quand c'est possible.

Exercice 5.1. Soit U une variable aléatoire normale centrée et réduite.
i) Calculer $\mathbb{P}[U < 2]$, $\mathbb{P}[U > 2]$, $\mathbb{P}[U < -2]$, $\mathbb{P}[-1 < U < 0.5]$ et $\mathbb{P}[4U \geq 3]$.
ii) Déterminer a et b tels que $\mathbb{P}[|U| < a] = 0.82$ et $\mathbb{P}[U < -b] = 0.6$

Exercice 5.2. Une variable aléatoire X suit une loi de Laplace-Gauss de moyenne 5 et de variance $\sigma^2 = 9$.
i) Si $U = \mathcal{N}(0,1)$, pour a donné, exprimer $\mathbb{P}(X \leq a)$ en fonction de $\mathbb{P}(U \leq b)$, où b est un réel qui dépend de a et que l'on déterminera.
ii) Calculer les probabilités des événements suivants.

- X inférieur à 8.
- X supérieur à 2.
- X compris entre -1 et 11.
- X extérieur à l'intervalle $[-4, 14]$.

Exercice 5.3. Sachant que la répartition des *quotients intellectuels* (Q.I.), rapport entre l'âge mental et l'âge réels des conscrits recrutés est une loi normale de moyenne 0.90 et d'écart type 0.40 ; Calculer, pour un bataillon (1000 personnes) :
i) Le nombre de conscrits ayant un Q.I. inférieur à 1.
ii) Le nombre de conscrits ayant un Q.I. inférieur à 0.1.
iii) Le nombre de conscrits ayant un Q.I. supérieur à 1.4.
iv) Le nombre de conscrits ayant un Q.I. compris entre 0.8 et 1.3.

Exercice 5.4. Soit $X = \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = \mathcal{N}(m, \sigma)$. En admettant que $\mathbb{E}(X)$ est bien définie, montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$. En utilisant une intégration par partie, montrer que $\mathrm{Var}(X) = 1$. En déduire, à l'aide de changements de variable, que $\mathbb{E}(Y) = m$ et $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$.

Exercice 5.5. Si X est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ telle que $\mathbb{P}[X < 3] = \mathbb{P}[X \geq 1] = 0,8413$; déterminer m et σ. Calculer $\mathbb{P}[0 < X < 1]$.

Exercice 5.6. Soit X une variable aléatoire normale telle que $\mathbb{P}[X \geq 3] = 0,8413$ et $\mathbb{P}[X \geq 9] = 0.0228$. Déterminer l'espérance m de X et son écart type σ.

Exercice 5.7. Une confiture peut être qualifiée "pur sucre" si elle contient entre 420 et 520 g de sucre par kilogramme de confiture. Un fabricant vérifie 200 pots de confiture de 1kg. Il trouve que le poids moyen de sucre est 465 g, avec un écart type de 30.

Sachant que le sucre est distribué normalement (car il provient de fruits à teneur en sucre variable), calculer le pourcentage de la production du fabricant qui ne doit pas porter la mention "pur sucre", en considérant l'échantillon comme représentatif de la production générale.

Exercice 5.8. Si $Z = \mathcal{N}(3,3)$, et si T est la variable aléatoire définie sur $]1/2, +\infty[$ par $Z = \ln(2T+1)$, calculer $\mathbb{P}[0.75 < T < 1]$.

Exercice 5.9. Soit S une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.
i) Donner $\mathbb{P}[S = 6]$, $\mathbb{P}[S < 4]$, $\mathbb{P}[S \geq 5]$, $\mathbb{P}[\frac{\pi}{2} < S < 2\pi]$.
ii) Déterminer α tel que $\mathbb{P}[S < \alpha] \geq 0.95$.

Exercice 5.10. Soient U, V et W des variables aléatoires suivant respectivement la loi du chi-deux χ^2 à 10 degrés de liberté, la loi de Student à 12 degrés de liberté et la loi normale $\mathcal{N}(10, 30)$.
Calculer u tel que $\mathbb{P}[U < u] = 0.975$. Encadrer au mieux $\mathbb{P}[U < 4.5]$. Soit $Y = \chi^2_{40}$, calculer y tel que $\mathbb{P}[Y < y] = 0.90$.
Calculer v tel que $\mathbb{P}[V < v] = 0.80$ et v' tel que $\mathbb{P}[V < v'] = 0.20$.
Calculer w tel que $\mathbb{P}[W < w] = 0.95$. Soit $Z = \mathcal{N}(30, 10)$. Calculer z tel que $\mathbb{P}[Z < z] = 0.05$.

6. **Théorèmes de convergences stochastiques**

Exercice 6.1. Un hôtelier loue ses 56 chambres à l'avance pour le mois d'août. Ayant remarqué que chaque année en moyenne 6% de ses clients se décommandent, au dernier moment, il décide d'accepter 60 réservations.
i) Soit X la v.a. discrète "nombre de clients qui se décommandent". Est-ce qu'une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ pour X vous semble un choix raisonnable ? Si oui, quelle sont les valeurs de n et p.
ii) En utilisant un théorème d'approximation de la loi binômiale (justifier) et les tables statistiques, donner la probabilité que tous les clients qui se présentent soient logés.
iii) Sachant que 60 réservations ont été prises, de combien de chambres devrait-il disposer pour être sûr a 95% de faire face à ses engagements ?

Exercice 6.2. On présélectionne les candidats à un jeu télévisé en leur posant 50 questions. Pour chacune, ils doivent choisir parmi 3 affirmations celle qui est exacte. Sont retenus pour la suite ceux qui proposent la bonne réponse à la moitié des questions au moins.
i) Pour un candidat qui répondrait au hasard aux questions, si on appelle X la variable aléatoire discrète qui compte le nombre de bonne réponse, quelle est la loi de X ?
ii) Par quelle loi peut-on raisonnablement approximer la loi de X ci-dessus ?
iii) En utilisant une approximation de la loi de X et les tables statistiques, donner la probabilité de sélectionner un tel candidat.
iv) Quelle est la probabilité d'éliminer un candidat qui connaît la réponse à 15 questions et qui répond aux autres questions au hasard ? (on utilisera encore l'approximation précédente)

Exercice 6.3. On lance un dé non pipé 100 fois de façon indépendante. Quelle est la probabilité que la somme totale des points obtenus soit comprise entre 300 et 400.

Exercice 6.4. Le contenu en nicotine d'une cigarette d'une marque bien connue est une variable aléatoire de moyenne 0,8 mg et d'écart type 0,1 mg.
i) Un fumeur de cette marque consomme 5 paquets (de 20 cigarettes) par semaine
- Quelle est la probabilté qu'il absorbe en une semaine plus de 82 mg de nicotine.
- Quelle est la probabilité qu'il absorbe en une semaine moins de 79 mg.

ii) Déterminer le nombre minimum de cigarettes que doit fumer une personne pour être sûre à 95% d'absorber plus de 80 mg de nicotine.

Exercice 6.5. Admettons que lorsqu'on arrondit un nombre réel à l'entier le plus proche, l'erreur commise soit une variable aléatoire distribuée uniformément sur $]-1/2, 1/2[$. On arrondit $n = 75$ nombres réels à l'entier le plus proche et on calcule la somme. Quelle est la probabilité que l'écart entre la somme ainsi obtenue et la somme exacte des n nombres soit supérieur à 2.5 ?

Exercice 6.6. Un astronome souhaite mesurer la distance d, en années lumière, entre son observatoire et une étoile lointaine. Bien qu'il connaisse une technique de mesure, il sait aussi que chaque résultat ne constitue qu'une valeur approchée de la distance réelle d, en raison des influences atmosphériques et des erreurs des appareils de mesure. Par conséquent, notre astronome prévoit d'effectuer un nombre N de mesures et d'accepter leur moyenne comme estimation de la distance réelle. Il a des raisons de penser que les différentes valeurs mesurées sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance commune d (d est la distance réelle), et de variance commune estimée à 4 (l'unité étant l'année lumière).

i) Soit X_i la variable aléatoire qui décrit la $i$ème mesure. A l'aide des X_i et de d, écrire l'événement

"La valeur moyenne de N observations est distante de d de 0,5 au plus"

ii) A l'aide du théorème de la limite centrale, estimer la valeur N minimale pour que la moyenne des N mesures effectuées s'écarte de la valeur réelle d au plus de 0,5 années lumière, avec une probabilité de 95%.

Exercice 6.7. Des ingénieurs estiment que W, le poids (en tonnes) qu'une travée de pont peut supporter sans subir de dommages au niveau de sa structure, suit une loi normale de moyenne 400 et décart type 40. Supposons que le poids (en tonnes) d'un véhicule passant sur ce pont est une variable aléatoire normale de moyenne 3 et d'écart type 0.3.

On rappelle que si $X = \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $Y = \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors

$$X + Y = \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}) \quad et \quad X - Y = \mathcal{N}(m_1 - m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

i) Donner la loi de la variable aléatoire K_n qui donne le poids en tonne de n véhicules.
ii) Que modélise l'événement $\{W - K_n < 0\}$?
iii) Combien de voitures devraient se trouver sur cette travée pour que la probabilité de dommage de structure soit supérieure à 0.1 ?

Exercice 6.8. On considère une urne contenant deux boules blanches et quatre boules vertes dans laquelle on effectue n tirages avec remise. A chaque tirage $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on associe la variable aléatoire

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la boule tirée est blanche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit alors la variable aléatoire $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
i) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\overline{X}_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine (i.e. qui prend une seule valeur avec proba 1) que l'on précisera.
ii) Déterminer le nombre minimum n_0 de tirages nécessaires pour que $\mathbb{P}\{|\overline{X}_n - 1/3| \geq 0.02\} \leq 0.01$ en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
iii) En utilisant le théorème de la limite centrale, déterminer la valeur n_0' répondant à la question précédente. Comparer avec ii).

Exercice 6.9. Un détaillant vend un produit à l'unité. Le temps qui s'écoule entre deux ventes consécutives est une variable aléatoire de moyenne égale à une semaine et d'écart-type égal à une semaine. Au moment de la dernière vente, le détaillant a constaté qu'il lui restait 36 unités. S'il doit se réapprovisionner seulement dans 6 mois (26 semaines), quelle est la probabilité que son stock ne soit pas épuisé avant le réapprovisionnement ?
Indication : On considèrera X_i la variable aléatoire décrivant le temps écoulé entre la vente de la $(i-1)$ème unité et la $i$ème unité.

Exercice 6.10. *Méthode de Monte-Carlo* Soit g une fonction réelle continue sur $[0, 1]$, et soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Expliciter $\mathbb{E}(g(X_n))$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(X_k(\omega)) - \int_0^1 g(x)dx|\right| < \epsilon\right\} = 1 \ .$$

7. **Echantillonage**

Exercice 7.1. En utilisant une table de nombres au hasard, construire un échantillon de taille 10 de valeurs de la loi de Gauss $\mathcal{N}(2,3)$.

Exercice 7.2. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n et soit

$$\sigma' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

la variance empirique. Montrer que

$$\sigma' = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X}^2$$

Exercice 7.3. i) Soit Z_i, $i = 1, 2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernouilli de paramètre p. Montrer que $\overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ vérifie

$$\overline{Z}_n \to p \ ,$$

avec probabilité 1.
ii) Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires continues de fonction de répartition $F(x)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés, on considère la variable aléatoire *fonction de répartition empirique* $F^*_{n,x}$ égale à la proportion des n variables $X_1, \ldots, X_n$ qui sont inférieures à x :

$$F^*_{n,x}(\omega) = \frac{1}{n}\mathrm{Card}\{i = 1, \ldots, n \mid X_i(\omega) \leq x\}$$

Montrer que Y_n est la somme de n variables aléatoires de Bernouilli dont on donnera le paramètre.
Déduire de i) et ii) que

$$F^*_{n,x} \to F(x) \ ,$$

avec probabilité 1.

Exercice 7.4. On étudie comment se répartissent les achats de lessive, dans l'ensemble d'un pays, par ménage et par an. Les statistiques disponibles permettent d'évaluer que la consommation moyenne de la population est de 30 kg, avec un écart type de 5 kg. On prélève au hasard, dans la population étudiée, 50 ménages.
i) Rappeler la définition de la moyenne empirique.
ii) Pourquoi peut-on supposer qu'elle suit une loi gaussienne ?
iii) Donner les paramètres de cette loi.
iv) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de la variance empirique (non biaisée), si on estime que $\mu_4 = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) = 1850$.

8. **Estimations**

Exercice 8.1. On considère la variable aléatoire L correspondant à la durée de vie de moteurs d'un type donné fabriqués dans une même usine. On suit 125 moteurs, et on relève le nombre X_i de kilomètres parcourus avant révision totale. Dans cet échantillon, on a trouvé les chiffres suivants exprimés en millier de kilomètres : $a = \sum x_i/125 = 120$ et $\sum(x_i - a)^2 = 2812,5$. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance de L.

Exercice 8.2. *Estimation du paramètre λ d'une loi de Poisson*
Une variable aléatoire K représente le nombre de pannes d'un dispositif électronique. La variable K obéit à une loi de Poisson. On expérimente 8 appareils comportant le dispositif. Pour chaque appareil, on relève le nombre de pannes dans un mois. On obtient les nombres suivants :

$$6, \ 3, \ 1, \ 3, \ 1, \ 4, \ 0, \ 2 \ .$$

i) Est-il raisonnable de prendre comme estimateur de λ la moyenne empirique (Dire si l'estimateur est sans biais, étudier la variance et la convergence de l'estimateur lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini).
ii) En déduire une estimation ponctuelle λ_0 de λ.
iii) En choisissant ici $\lambda = \lambda_0$, construire un tableau avec les valeurs de $\mathbb{P}(K = k)$ et $\mathbb{P}(K \leq k)$ pour $k = 0, \dots, 6$. En déduire la valeur minimum de k_0 pour que $\mathbb{P}(K \leq k_0)$ soit égal à 95% au moins.
iv) Peut-on admettre que pour le premier appareil une cause extérieure de panne soit intervenue augmentant anormalement le nombre de pannes ?
v) Si on pense que l'échantillon est plus homogène en excluant le premier appareil, quelle est la nouvelle estimation ponctuelle de λ ?

Exercice 8.3. Une enquête menée auprès d'ouvriers d'une certaine industrie, quant à leur salaire brut journalier x_i, a donné, pour 535 ouvriers interrogés, les résultats suivants :

$$535\,\overline{x} = \sum_{i=1}^{535} x_i = 58847 \text{ Euros} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{535}(x_i - \overline{x})^2 = 71379 \text{ Euros} \ .$$

Estimer le salaire brut moyen m et la variance σ^2.

Exercice 8.4. On mesure la force de compression d'un ciment en moulant de petits cylindres et en mesurant la pression X, exprimée en kg.cm^{-2}, à partir de laquelle ils se brisent. A partir des mesures sur un échantillon de 10 cylindres, on a calculé une moyenne statistique $\overline{x} = 19,72$, et une variance (non corrigée) $\overline{v} = 0,6096$.
i) Donner une estimation (ponctuelle) pour $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
ii) En supposant X gaussien, donner un intervalle de confiance avec un seuil de confiance $0,1$, de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
iii) On suppose maintenant que la variance $\mathrm{Var}(X)$ vaut $0,69$. Donner un nouvel intervalle de confiance pour l'espérance de X avec le risque $0,1$.

Exercice 8.5. Un laboratoire d'agronomie a effectué une étude sur le maintien du pouvoir germinatif des graines de *Papivorus subaquaticus* après une conservation de 3 ans. Sur un lot de 80 graines, 47 ont germé. Donner, avec une confiance de 95%, un intervalle de confiance pour la probabilité de germination des graines de Papivorus subaquaticus après une conservation de 3 ans.

Exercice 8.6. On a étudié la répartition du poids de 100 jeunes gens et on a obtenu le tableau suivant :

Poids en kg	$[40,45[$	$[45,50[$	$[50,55[$	$[55,60[$	$[60,65[$	$[65,70[$	$[70,75[$
Fréquence	5	12	31	31	16	3	2

Estimer les paramètres de la loi normale qui modélise ces observations.

Exercice 8.7. Un laboratoire indépendant a vérifié pour le compte de l'office de la protection du consommateur, la résistance à l'éclatement (en kg.cm^{-2}) d'un réservoir à essence d'un certain fabricant. Des essais similaires, effectués il y a un an, permettent de considérer que la résistance à l'éclatement est distribuée normalement avec une variance de 9. Des essais sur un échantillon de 10 réservoirs conduisent aux mesures de résistance suivantes (en kg.cm^{-2}) :

$$211;\ 234,5;\ 213,5;\ 228,5;\ 225;\ 219;\ 207;\ 241;\ 212,5;\ 198\ .$$

Estimer par un intervalle de confiance la résistance moyenne à l'éclatement de ce type de réservoir avec une confiance de 95%, puis de 99%.

Exercice 8.8. Une machine fabrique des rondelles en série. Leur diamètre est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. On prélève au hasard un échantillon de 9 rondelles. Les mesures des diamètres en mm sont les suivantes.

$$20,1;\ 19,9;\ 20;\ 19,8;\ 19,7;\ 20,2;\ 20,1;\ 23,1;\ 22,8\ .$$

Construire un intervalle qui contienne, avec une probabilité $0,95$, la moyenne m des diamètres des rondelles fabriquées par la machine dans chacune des situations suivantes :
a) σ est connu et est égal à 1mm.
b) σ est inconnu.
ii) Construire, dans le cas où σ est inconnu, un intervalle qui contienne avec une probabilité de $0,9$ la variance σ^2.

Exercice 8.9. Pour connaître la proportion p des écoles maternelles possédant au moins un magnétoscope, un organisme d'étude de marchés effectue un sondage. L'enquête montre que sur 100 écoles maternelles choisies au hasard, 25 possèdent un magnétoscope. Donner un intervalle de confiance à 95% pour p.

Exercice 8.10. Un sondage sur la popularité du premier ministre indique que 51% des personnes interrogées sont favorables à sa politique. Construire un intervalle de confiance de niveau $0,95$ pour la proportion p de français favorables à cette politique sachant que ce sondage a été réalisé auprès de $n = 100$ personnes ; même question si $n = 1000$. Quelle aurait du être la taille de l'échantillon pour que l'intervalle soit de longueur inférieure à 4% ?

Exercice 8.11. L'article suivant est extrait du journal Le Monde du *3 mars 1983*.

BOURSE DE NEW-YORK
NOUVEAU RECORD

La reprise frappe à la porte. Wall Street en est maintenant convaincu, après la publication faite par le Département du Commerce des principaux indicateurs économiques pour janvier.

Dans ces statistiques, il ressort que l'indice des valeurs industrielles a monté de $3,6\%$. Cette hausse mensuelle est la plus forte enregistrée depuis 1950. Elle est surtout supérieure aux prévisions les plus optimistes que les boursiers avaient pu faire.

Beaucoup sont maintenant persuadés autour du “Big board” que le marché est entré dans une nouvelle phase d'ascension. La clientèle particulière a, pour sa part, fait un retour très marqué que certains jugent significatif.

Sur les 1970 valeurs traitées le 2 mars, 1168 ont monté, 469 ont baissé et 333 n'ont pas varié.

Voici une sélection des cours du jour :

Valeurs	*Cours du* 1er *mars*	*Cours du* 2 *mars*
Alcoa	34 3/4	35 1/8
ATT	67 1/2	66 7/8
Boeing	37	36 7/8
Chase Manhattan Bank	47 1/4	48 7/8
Du Pont de Nemours	40 5/8	41
Eastman Kodak	89 1/4	89
Exxon	30	30 7/8
Ford	40 1/2	41 3/8
General Electric	111	108
General Foods	39 3/8	39 1/2
General Motors	63 1/2	63
Goodyear	31 3/4	31 5/8
IBM	101 3/4	102 1/8
ITT	33 3/8	33 3/4
Mobil Oil	27 1/4	28 1/2
Pfizer	72 3/4	74 1/4
Schlumberger	40 1/2	41 7/8
Texaco	32 1/8	33
U.A.L. Inc.	34	34 3/8
Union Carbide	61 1/2	61 1/4
U.S. Steel	22 3/4	22 7/8
Westinghouse	48 5/8	49 1/4
Xerox Corp	38 5/8	39 5/8

i) D'après la sélection des valeurs dont les cours ont été publiés, donner un intervalle de confiance pour la proportion de valeurs ayant strictement monté lors de la séance du 2 mars. Que penser du résultat ?
ii) D'après les mêmes données, quel est l'intervalle de confiance pour la proportion de valeurs ayant vu leur cours inchangé ? Quelles reflexions supplémentaires ce résultat inspire-t-il ?

9. **Tests**

Exercice 9.1. On souhaite contrôler un lot important de pièces métalliques. Une caractéristique des ces pièces, notée X, est une variable aléatoire, dont la loi de probabilité est normale de moyenne m et de variance σ^2 inconnues. On se propose de prendre une décision au sujet de σ^2 au vu d'un échantillon de taille $n = 12$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_{12}\}$. On sait également que

$$\sum_{i=1}^{12} \left(x_i - \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} \right)^2 = 650 \ .$$

Doit-on accepter l'hypothèse "$\sigma^2 = 100$" avec un risque de $0,05$?

Exercice 9.2. On se demande quelle est la proportion p des ménages possédant un poste de télévision. Pour déterminer le paramètre p on hésite entre deux hypothèses H_0 et H_1. On se propose de prendre une décision au vu d'un échantillon significatif de taille $n = 125$. Soit f_n la proportion observée dans l'échantillon. On obtient $f_n = 0,48$. On prendra un risque de $0,05$. Doit-on accepter l'hypothèse H_0 : "$p = 0,5$" ?

Exercice 9.3. Etant donné un certain dé on veut tester l'hypothèse H_0 : "Le dé est régulier".
On note note X la variable aléatoire définie par le chiffre obtenu si on lance le dé
i) Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2), \ldots,$ $\mathbb{P}(X = 6)$.
ii) On lance 600 fois le dé. Quels sont les effectifs E_1 (respectivement $E_2, \ldots E_6$), effectifs espérés pour "$X = 1$" (respectivement "$X = 2$",... ,"$X = 6$") ?
iii) On a obtenu 105 fois le chiffre 1, 98 fois le chiffre 2, 103 fois le chiffre 3, 111 fois le chiffre 4, 95 fois le chiffre 5 et 88 fois le chiffre 6. Peut-on accepter l'hypothèse H_0 avec le risque $0,05$?

Exercice 9.4. On lance 4000 fois une pièce de monnaie. On obtient 1870 faces. La pièce est-elle truquée ?

Exercice 9.5. On suppose que le taux de chômage dans un pays donné est de 10%. Dans une ville donnée, on observe 1080 chômeurs sur 10000 personnes actives. Peut-on dire que la différence avec le pourcentage national est significatif, avec un risque de 5% ?

Exercice 9.6. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(1,1;\, 0,4)$.
i) Calculer $\mathbb{P}(Y \in I_k)$, $k = 1, \ldots, 7$ où
$I_1 =]-\infty; 0,6]$, $I_2 =]0,6;\, 0,8]$, $I_3 =]0,8;\, 1]$, $I_4 =]1;\, 1,2]$, $I_5 =]1,2;\, 1,4]$,
$I_6 =]1,4;\, 1,6]$, $I_7 =]1,6; +\infty]$.
ii) On considère 120 personnes et on note n_k le nombre de ces personnes possédant un quotient intellectuel appartenant à l'intervalle I_k. On obtient le tableau suivant :

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
n_k	9	10	21	25	24	17	14

Tester à l'aide du χ^2 au risque $\alpha = 0,05$ la validité de l'ajustement de la distribution ci-dessus à la loi normale $\mathcal{N}(1,1;\, 0,4)$.

Exercice 9.7. Le prix d'un même article relevé au hasard dans 15 épiceries de la ville donne ceci :

$42,7$	$42,6$	43	$43,5$	$42,8$	$43,1$	$43,6$	$42,9$
$41,6$	$42,8$	$42,9$	$43,2$	$42,6$	$43,1$	$43,1$	

On admet que X est une variable aléatoire suivant une loi gaussienne. On fixe les risques à 5%.
i) Peut-on admettre l'hypothèse $\mathbb{E}(X) = 43,0$?
ii) Peut-on admettre l'hypothèse $\mathrm{Var}(X) = 0,1$?

Exercice 9.8. Une roulette possède 37 numéros (de 0 à 36). Sur 10000 parties, le zéro est sorti 298 fois. On admet que la sortie du zéro est une variable aléatoire de Bernouilli.
On considère l'hypothèse simple le zéro sort avec une probabilité de 1/37. Avec un risque de 5%, peut-on accepter l'hypothèse ?

Exercice 9.9. Selon la théorie Mendélienne de l'hérédité, on prévoit qu'en croisant deux types de plantes, on doit obtenir des variétés de quatre types (disons S, T, U et V), avec une probabilité respective de 9/16, 3/16, 3/16, 1/16. A la suite d'une expérience, on obtient 154 plantes de type S, 44 de type T, 63 de type U et 21 de type V.

Peut-on accepter l'hypotèse que l'échantillon obtenu est conforme à la théorie Mendélienne avec un risque de 5% ?

Exercice 9.10. Pour justifier la loi de Gompertz modélisant l'extinction des populations, K. Miescher a mesuré l'évolution au cours du temps du nombre de rats vivants dans un élevage qu'il commença avec 144 rats en 1953. Le tableau suivant donne le nombre N de rats vivants au bout de t mois.

t	10	15	20	25	28	30	32	34	36	38	40	42	43
N	144	143	140	131	119	106	86	63	37	15	4	1	0

i) Remplir le tableau suivant donnant l'effectif E des rats ayant une durée de vie D dans chaque intervalle de temps.

D	$]10, 20]$	$]20, 25]$	$]25, 30]$	$]30, 34]$	$]34, 38]$	$]38, 40]$	$]40, 43]$
E							

ii) Tracer l'histogramme correspondant. L'allure de l'histogramme ressemble-t-il à celui que donnerait une loi gaussienne ?
iii) Evaluer la moyenne m et l'écart type σ de la variable aléatoire D en supposant que sa loi est Gaussienne.
iv) A l'aide d'un test du χ^2, vérifier que la différence entre les résultats expérimentaux et les prédictions données par la loi Gaussienne (dont on fixe les paramètres m et σ conformément à l'estimation précédente) est significative avec un seuil élevé.

Exercice 9.11. On considère une épreuve à laquelle on associe la variable aléatoire X, qui prend les valeurs 0, 1, 2 ou 3. On veut tester sa conformité à la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
i) Calculer $p_{00} = \mathbb{P}(X = 0)$, $p_{01} = \mathbb{P}(X = 1)$, $p_{02} = \mathbb{P}(X = 2)$, $p_{03} = \mathbb{P}(X = 3)$ et $p_{04} = \mathbb{P}(X > 3)$.
ii) On effectue 100 fois cette épreuve. On a obtenu 30 fois le chiffre 0, 40 fois le chiffre 1, 20 fois le chiffre 2 et 10 fois le chiffre 3. Peut-on accepter l'hypothèse de conformité de X avec la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ au risque $0,05$?

Contrôle continu

(22 avril 2002)

Durée : 2h.

Documents interdits. Calculatrices non programmables autorisées

Exercice 1

Deux cours ont lieu en parallèle dans deux amphithéâtres contigus. Les deux amphithéâtres, appelés a et b contiennent respectivement 90% et 50% de filles, et dans l'amphi b, il y a 4 fois plus d'étudiants que dans l'amphi a.

Soient les événements F="être une fille" et A="être dans l'amphi a".

i) On considère la population Ω constituée des étudiants de a et b réunis. Pour cette population, donner $\mathbb{P}(F|A)$, $\mathbb{P}(F|B)$, $\mathbb{P}(A)$.

ii) Rappeler la formule de Bayes. Les deux amphithéâtres se vidant simultanément dans le même couloir, quelle est la probabilité qu'une fille choisie au hasard dans ce couloir sorte de l'amphi a ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Deux personnes choisissent au hasard et de façon indépendante, chacune une fois, un entier compris entre 0 et n (inclus). Soit X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire qui représente le premier (respectivement deuxième) entier choisi.

i) Donner les lois de X_1 et X_2.

ii) Soit $X = X_1 + X_2$ la variable aléatoire égale à la somme des deux entiers choisis.

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $p_k = \mathbb{P}[X = k]$, et vérifier que $\sum_k p_k = 1$.

b) Pour $n = 6$ calculer $\mathbb{P}(X \in \{5, 6, 7\})$ et $\mathbb{P}(X \in \{10, 11, 12\})$

Exercice 3

La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-dessous :

X \ Y	1	2	3
1	0	α	0,1
2	α	0,3	0,1
3	0,1	0,2	0

i) Déterminer α. Donner les lois marginales de X et Y, leur espérance et leur variance.

ii) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Donner, en fonction de m et σ, la densité de probabilité de X.

On suppose que $\mathbb{P}(X \leq 2,1) = 0,934$ et $\mathbb{P}(X > 0,5) = 0,5987$. Calculer $\mathbb{P}(X \in [0, 3])$.

Correction du contrôle continu du 22 avril 2002

Exercice 1.
i) L'événement F sachant A se réecrit "L'étudiant choisi au hasard dans l'amphi A est une fille". Comme l'amphi A contient 90% de filles, on a $\mathbb{P}(F|A) = 0,9$. De façon similaire on calcule $\mathbb{P}(F|B) = 0,5$.

Soit Ω la population constituée de tous les étudiants des amphis A et B. Comme il y a 4 fois plus d'étudiants dans B que dans A, on a une proportion d'un étudiant sur cinq dans Ω qui est de l'amphi A. Donc $\mathbb{P}(A) = 1/5$.
ii) La formule de Bayes dans le cas qui nous intéresse s'écrit

$$\mathbb{P}(A|F) = \frac{\mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F|B)\mathbb{P}(B)} \ ,$$

car $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$. La probabilité demandée est donc $\mathbb{P}(A|F) = \frac{0{,}9.1/5}{0{,}9.1/5+0{,}5.4/5} = 9/29 \simeq 31\%$.

Exercice 2.
i) Chaque nombre entier entre 0 et n a la même chance d'être tiré au hasard. On a donc une loi uniforme sur l'ensemble discret $\{0, 1, \ldots, n\}$. Ainsi, pour tout i dans cet ensemble on a

$$\mathbb{P}(X_1 = i) = \mathbb{P}(X_2 = i) = \frac{1}{n+1} \ .$$

ii) La somme de deux nombres entiers pris au hasard entre 0 et n appartient à l'ensemble $\{0, 1 \ldots, 2n\}$.

Si $s \notin \{0, 1 \ldots, 2n\}$, $\mathbb{P}(X = s) = 0$.

Si $s \in \{0, 1 \ldots, 2n\}$, on distingue deux cas.

– Si $s \in \{0, 1 \ldots, n\}$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = s) &= \mathbb{P}\left(\cup_{k=0}^{s} (\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = s-k\})\right) \\
&= \sum_{k=0}^{s} \mathbb{P}\left((\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = s-k\})\right) \ , \\
&\quad \text{(car les ensembles } (\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = s-k\}) \text{ sont disjoints)} \\
&= \sum_{k=0}^{s} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = s-k) \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont independants} \\
&= \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{s}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

– Si $s \in \{n+1 \ldots, 2n\}$, comme X_1 et X_2 ne peuvent pas prendre de valeurs entre $n+1$ et s, la somme à considérer est différente de celle ci-dessus.

$$\mathbb{P}(X = s) = \mathbb{P}\left(\cup_{k=s-n}^{n} (\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = s-k\})\right) \ .$$

(Si k varie de $s-n$ à n, alors $s-k$ varie de n à $s-n$ en décroissant). On a

$$\mathbb{P}(X = s) = \sum_{k=s-n}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n-s+1}{(n+1)^2} \ .$$

Vérifions que $\sum_k p_k = 1$.

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(n+1)^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{(n+1)^2}$$

En utilisant l'égalité $\displaystyle\sum_{j=0}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2}$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{-k}{(n+1)^2} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{-k}{(n+1)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(n+1)^2} = -\frac{2n(2n+1)}{2(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} \ .$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{2n} p_k = \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} + \frac{n+1}{(n+1)^2} + \frac{2n^2}{(n+1)^2} - \frac{2n(2n+1)}{2(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^2} = 1 \ .$$

Application numérique : $n = 6$.

$$\mathbb{P}(X \in \{5,6,7\}) = \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=6) + \mathbb{P}(X=7) = \frac{6}{49} + \frac{7}{49} + \frac{6}{49} = \frac{19}{49} \ .$$

$$\mathbb{P}(X \in \{10,11,12\}) = \frac{3}{49} + \frac{2}{49} + \frac{1}{49} = \frac{6}{49} \ .$$

Exercice 3.
i) Soit $\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1);(1,2);(1,3);\ldots;(3,2);(3,3)\}$. Le réel α doit vérifier $\mathbb{P}((X,Y) \in \Omega) = 1$, i.e., $0 + \alpha + 0,1 + \alpha + 0,3 + 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0 = 1$, ce qui implique $\alpha = 0,1$.

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}((X,Y)=(1,1)) + \mathbb{P}((X,Y)=(1,2)) + \mathbb{P}((X,Y)=(1,3)) = 0,2$$

De même on calcule $\mathbb{P}(X=2) = 0,5$, $\mathbb{P}(X=3) = 0,3$.

On a aussi $\mathbb{P}(Y=1) = 0,2$, $\mathbb{P}(Y=2) = 0,6$ et $\mathbb{P}(Y=3) = 0,2$.

L'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{k=1}^{3} k\mathbb{P}(X=k) = 2,1$$

On a

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{3} k^2\mathbb{P}(X=k) = 4,9 \ ,$$

donc

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0,49 \ .$$

De façon similaire on calcule $E(Y) = 2$ et $V(Y) = 0,4$.
ii) Pour le calcul de $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, on peut par exemple calculer la loi de $Z = XY$; on trouve $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}((X,Y)=(1,1)) = 0$, $\mathbb{P}(Z=2) = \mathbb{P}((X,Y) = (1,2)) + \mathbb{P}((X,Y)=(2,1)) = 0,2$, etc... On trouve alors facilement

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = -0,2$$

Exercice 4.
Il faut tout d'abord déterminer m et σ. On a

$$\mathbb{P}(X \leq 2,1) = \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{2,1-m}{\sigma}\right) = 0,934 \ .$$

Comme $(X-m)/\sigma$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on en déduit par la lecture de la table de la loi de Gauss centrée réduite que $(2,1-m)/\sigma = 1,51$. On a d'autre part

$$\mathbb{P}(X > 0,5) = \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{0,5-m}{\sigma}\right)$$

Comme $(X-m)/\sigma$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ on a le droit d'écrire

$$\mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{0,5-m}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{X-m}{\sigma} < -\frac{0,5-m}{\sigma}\right) = 0,5987 \ .$$

Cela implique $(m-0,5)/\sigma = 0,25$.

Ainsi

$$2,1-m = 1,51\,\sigma \quad \text{et} \quad m-0,5 = 0,25\,\sigma \ ,$$

ce qui donne $m = 0,73$ et $\sigma = 0,91$. On obtient alors par un calcul simple

$$\mathbb{P}(X \in [0;3]) = \mathbb{P}\left(\frac{X-0,73}{0,91} \in [-0,8;2,49]\right) = 0,78 \ .$$

Examen

(septembre 2002)

Exercice 1. Une roulette possède 37 numéros (de 0 à 36). Sur 10000 parties, le zéro est sorti 298 fois. On admet que la sortie du zéro est une variable aléatoire de Bernouilli.
On considère l'hypothèse simple le zéro sort avec une probabilité de 1/37. Avec un risque de 5%, peut-on accepter l'hypothèse ?

Exercice 2. Selon la théorie Mendélienne de l'hérédité, on prévoit qu'en croisant deux types de plantes, on doit obtenir des variétés de quatre types (disons S, T, U et V), avec une probabilité respective de 9/16, 3/16, 3/16, 1/16. A la suite d'une expérience, on obtient 154 plantes de type S, 44 de type T, 63 de type U et 21 de type V.

Peut-on accepter l'hypotèse que l'échantillon obtenu est conforme à la théorie Mendélienne avec un risque de 5% ?

Exercice 3. (c.f. exercice 8.11)

Correction examen de Septembre 2002

Exercice 1. A partir des résultats statistiques, donnons un intervalle de confiance de la probabilité pour que le zéro sorte (estimation d'une proportion).

L'estimation pontuelle donne, $p^* = 298/10000 \approx 2,98\%$. Avec un risque $\alpha = 0,05 = 5\%$, puisque le nombre de tirages est suffisamment élevé, on peut faire l'approximation de Moivre-Laplace, i.e., remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 10000, p = 1/37)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$; En effet, on a $n = 10000 \geq 50$ et $np^*(1-p^*) \approx 289 \geq 10$.

On a donc comme intervalle de confiance de la probabilité (ou proportion) que le zéro sorte :

$$I = \left[p^* - h\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}},\ p^* + h\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \right] ,$$

où $h = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ et Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Pour $p^* \approx 0,0298$, $n = 10000$ et $\alpha = 0,05$ (qui donne $h = 1,96$) on trouve

$$I \approx [2,65\%,\ 3,31\%] .$$

La probabilité théorique, si le jeu n'est pas truqué, est de $1/37 \approx 2,70\% \in I$. Donc, on accepte l'hypothèse.

Exercice 2. Il s'agit ici de tester une hypothèse multiple. L'effectif total de l'échantillon statistique est de $n = 154 + 44 + 63 + 21 = 282$. Avec les notations usuelles, on obtient le tableau suivant, pour les probabilités théoriques $p_{01} = \mathbb{P}(S) = 9/16$, $p_{02} = \mathbb{P}(T) = 3/16$, $p_{03} = \mathbb{P}(U) = 3/16$ et $p_{04} = \mathbb{P}(V) = 1/16$:

a_k	$E_k = np_{0k}$	O_k	$(O_k - E_k)^2/E_k$
S	$158,625$	154	$0,135$
T	$52,875$	44	$1,490$
U	$52,875$	63	$1,939$
V	$17,625$	21	$0,646$
Totaux	282	282	$u^* := 4,21$

Puisque pour tout $k = 1,2,3,4$ on a $E_k \geq 5$, on peut utiliser l'approximation gaussienne et faire un test du chi-deux pour cette hypothèse multiple. La région critique est

$$\mathcal{C} =]\chi^2_{q-1;\alpha};\ +\infty[,$$

où $q = 4$ est le nombre d'hyptohèses simples, et $\alpha = 0,05$ est le risque. On obtient, par la lecture de la table de la loi du chi-deux :

$$\mathcal{C} =]7,81, +\infty[\ .$$

Comme $u^* \notin \mathcal{C}$, on accepte l'hypothèse de conformité.

Exercice 3.

i) Le nombre de valeurs données est 23. Le nombre de valeurs ayant augmenté est de 16. L'estimation ponctuelle de la proportion est donc $p^* = 16/23 \approx 0,696$.

On fait l'approximation que l'on est en présence d'un échantillon gaussien. L'estimation par intervalle de confiance donne alors, pour un risque α

$$I = \left[p^* - h\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{23}},\ p^* + h\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{23}} \right]$$

Où $h = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$.

L'application numérique avec $\alpha = 0,05$ (choix canonique lorsqu'on n'impose pas de valeur) et la lecture de la table de la loi normale, donne $h = 1,96$ et donc

$$I = [50,1\%,\ 88,4\%] \ .$$

On en déduit que le choix de la sélection des cours du jour est représentative, car la proportion réelle des valeurs ayant augmenté est de $1168/1970 \approx 59,3\% \in I$.

ii) L'estimation pontuelle de la proportion des valeurs ayant vu leur cours inchangé est $q^* = 0/23 = 0$. On ne peut pas donner d'intervalle de confiance pour cette proportion, et bien évidemment, quel que soit le critère choisi, cette estimation ponctuelle de la vraie valeur $q = 333/1970 \approx 16,9\%$, est mauvaise.

Examen
(jeudi 13 juin 2003)

Durée : 3 heures.

Les calculatrices non programmables sont autorisées. Seul document autorisé : Une feuille format A4, manuscrite, écrite sur une seule page. Tout autre document est interdit.

Exercice 1. Dans une usine, on dispose de trois machines A_1, A_2 et A_3 fabricant des pièces automobiles d'un même type. La machine A_1 assure 25% de la production, A_2 en assure 35% et A_3 les 40% restants. On sait que
- 5% des pièces fabriquées par A_1 sont défectueuses,
- 4% des pièces fabriquées par A_2 sont défectueuses,
- 2% des pièces fabriquées par A_3 sont défectueuses.

Que vaut la probabilité de l'évènement "la pièce est défectueuse sachant qu'elle est issue de la production de A_1"

On tire maintenant au hasard une pièce de la production totale des trois machines. On constate que la pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A_1 ?

Exercice 2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de Poisson. Notons λ_1 et λ_2 les paramètres respectifs des lois de ces deux variables aléatoires.
i) Démontrer que la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$ est de Poisson d'espérance $\lambda_1 + \lambda_2$.

On Suppose maintenant que $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, et X_i= "le nombre de téléviseurs vendus au cours d'une journée dans un magasin M_i" ($i = 1$ ou 2).
ii) Quel est le nombre minimum de téléviseurs dont le magasin M_1 doit disposer pour satisfaire la demande d'une journée avec une probabilité supérieure à 90%.
iii) Si les magasins M_1 et M_2 réunissent leurs stocks, quel est le nombre minimum de téléviseurs dont le stock commun doit disposer pour que les deux magasins satisfassent les demandes d'une journée avec une probabilité supérieure à 90%.
iv) Les deux magasins ont-ils interêt à réunir leurs stocks ?

Exercice 3. Une machine fabrique des rondelles en série. Leur diamètre est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. On prélève au hasard un échantillon de 9 rondelles. Les mesures des diamètres en mm sont les suivantes.

$$20,1;\ 19,9;\ 20;\ 19,8;\ 19,7;\ 20,2;\ 20,1;\ 23,1;\ 22,8\ .$$

Construire un intervalle de confiance qui contienne, avec une probabilité $0,95$, la moyenne m des diamètres des rondelles fabriquées par la machine dans chacune des situations suivantes :
a) σ est connu et est égal à 1mm.
b) σ est inconnu.

Exercice 4. Pour justifier la loi de Gompertz modélisant l'extinction des populations, K. Miescher a mesuré l'évolution au cours du temps du nombre de rats vivants dans un élevage qu'il commença avec 144 rats en 1953. Le tableau suivant donne le nombre N de rats vivants au bout de t mois.

t	10	15	20	25	28	30	32	34	36	38	40	42	43
N	144	143	142	131	119	101	86	59	37	15	2	1	0

i) Remplir le tableau suivant donnant l'effectif E des rats ayant une durée de vie D dans chaque intervalle de temps (on a déja rempli certaines cases).

D	$]-\infty, 10]$	$]10,\ 20]$	$]20,\ 25]$	$]25,\ 30]$	$]30,\ 34]$	$]34,\ 38]$	$]38,\ 40]$	$]40,\ 43]$	$]43,\ +\infty[$
E	0	2	11						0

ii) Tracer l'histogramme correspondant. L'allure de l'histogramme ressemble-t-il à celui que donnerait une loi gaussienne ?
iii) Donner une estimation ponctuelle (à 10^{-2} près) de la moyenne m_0 et l'écart type σ_0 de la variable aléatoire D en supposant que sa loi est gaussienne (on prendra comme valeurs de l'échantillon, le milieu des intervalles D).
iv) Soit Z une variable aléatoire gaussienne de moyenne $m = 32,09$ et d'écart type $\sigma = 5,08$. Calculer, en expliquant votre calcul, $\mathbb{P}\left(Z \in]20, 25]\right)$.
v) Si X est une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(m_0, \sigma_0)$ (m_0 et σ_0 calculés au iii)), remplir le tableau suivant :

I	$]-\infty, 10]$	$]10,\ 20]$	$]20,\ 25]$	$]25,\ 30]$	$]30,\ 34]$	$]34,\ 38]$	$]38,\ 40]$	$]40,\ 43]$	$]43,\ +\infty[$
$\mathbb{P}(X \in I)$									

vi) A l'aide d'un test du χ^2, dire si la différence entre les résultats expérimentaux et les prédictions données par la loi gaussienne (dont on fixe les paramètres m_0 et σ_0 conformément à l'estimation précédente) est significative avec un risque de 5%. (remarque : il est possible dans cette question que pour le traitement de l'intervalle $]-\infty, 10[$, on ait à calculer une quantité du type "$0^2/0$". On posera alors ce nombre égal à 0).

Examen

(juin 2003)

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont interdits, à l'exception d'une feuille (2 pages) au format A4.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes, telles que pour $p \in]0,1[$ fixé,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X=k) = \begin{cases} p(1-p)^k & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

et

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(Y=k) = \begin{cases} p(1-p)^{-k} & \text{si } k \leq 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

Notez bien que X prend ses valeurs avec probabilité non nulle sur $\{0, 1, 2, \ldots, \}$ alors que Y prend ses valeurs avec probabilité non nulle sur $\{\ldots, -2, -1, 0\}$.
i) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
ii) Soit $S = X + Y$. Quelle est la loi de S ?

Exercice 2. Il existe deux types de jumeaux chez l'homme : les vrais jumeaux, issus d'un même oeuf (jumeaux monozygotes), et les faux, issus de deux oeufs distincts (jumeaux dizygotes). Les faux jumeaux sont deux fois plus nombreux que les vrais. Les vrais jumeaux sont nécessairement de même sexe, alors que les faux jumeaux sont de même sexe avec probabilité 1/2.
i) On considère les événements suivants pour la population Ω des jumeaux (un individu ω de la population Ω est un couple de jumeaux).
$A =$“ être de faux jumeaux ”.
$B =$“ être des jumeaux de même sexe”.
Donner $\mathbb{P}(B \mid A)$ et $\mathbb{P}(A)$.
ii) Sachant que deux jumeaux sont de même sexe, quelle est la probabilité qu'ils soient de vrais jumeaux ?

Exercice 3. Un détaillant vend un produit à l'unité. Le temps qui s'écoule entre la $(i-1)$ème vente et la $i$ème vente est une variable aléatoire X_i de moyenne $m = 1$ semaine et d'écart type $\sigma = 1$ semaine.
i) Soit S_n la variable aléatoire qui modélise le temps d'attente jusqu'à la $i$ème vente. Exprimer S_n en fonction des X_i. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, S_n peut-elle aussi modéliser le temps d'attente entre la $k$ème et la $(k+n)$ème vente ?
ii) Au moment de la dernière vente effectuée, le détaillant a constaté qu'il lui restait 36 unités. Il doit se réapprovisionner seulement dans 6 mois (26 semaines). Soit l'événement
$A =$ “ Le stock n'est pas épuisé avant le réapprovisionnement”
Déterminer l'entier $n \in \mathbb{N}$ et l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tels que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(S_n \in I) \ .$$

iii) Si on suppose les X_i indépendants, pour n assez grand ($n \geq 30$), par quelle loi peut-on approximer S_n (On citera précisément le théorème utilisé ici) ? En déduire une valeur approchée de $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 4. Un échantillon de 30 cigarettes d'une même marque a donné les teneurs en goudron, exprimées en mg, suivantes :

$12,9$	$12,7$	$12,4$	$12,8$	$14,5$	$13,1$	$12,9$	$14,5$	$11,7$	$12,3$
$13,4$	$12,8$	$13,4$	$12,9$	$12,9$	$12,5$	$12,5$	$12,8$	$11,8$	$11,8$
$13,4$	$12,4$	$13,4$	$12,5$	$12,8$	$12,8$	$13,5$	$12,8$	$12,9$	$12,7$

La norme en vigueur recommande une teneur en goudron inférieure ou égale à 13 mg par cigarette.
i) Donnez une estimation ponctuelle de la proportion des cigarettes de cette marque qui respectent la norme de la teneur en goudron
ii) Donnez une estimation ponctuelle de la teneur en goudron moyenne des cigarettes de cette marque, puis de l'écart type.
iii) On suppose maintenant que la variable aléatoire X qui donne la teneur en goudron en mg d'une cigarette de cette marque suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Donnez avec un risque de 5% une estimation par intervalle de confiance de m. Peut-on en déduire, avec cette confiance, que la norme en vigueur sur la teneur en goudron est respectée ?
iv) Mêmes questions qu'au iii) avec un risque de 30%.

Exercice 5. Une roulette possède 37 numéros (de 0 à 36). Sur 10 000 parties, le zéro est sorti 298 fois. On admet que la sortie du zéro est une variable aléatoire de Bernouilli de paramètre p. On considère l'hypothèse simple suivante :

(H0) : "Le zéro sort avec une probabilité 1/37".

Avec un risque de 5%, peut-on accepter l'hypothèse ?

Exercice 6. Soixante douze étudiants inscrits à un cours sont répartis comme suit selon leur mois de naissance :

Janv	Fev	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil	Aout	Sept	Oct	Nov	Déc
6	5	3	5	9	8	7	6	3	6	5	9

A l'aide d'un test du χ^2, testez l'hypothèse d'une distribution uniforme sur les 12 mois, avec un risque de 10%. (Rappel : une distribution uniforme donne un effectif théorique identique pour chaque mois).

Examen 2ème session
(septembre 2003)

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sonts interdits, à l'exception d'une feuille (2 pages) au format A4

Exercice 1. Un appareil comporte 2 circuits électroniques, tous les deux nécessaires à son fonctionnement. Les durées de vie respectives (en mois) de chacun d'eux sont données par des variables aléatoires de Poisson X_1 et X_2 de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. On suppose que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_1.

2) On suppose pour cette question que $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$. Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne sans panne pendant au moins 5 mois ? Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne moins de 8 mois ?

3) On suppose maintenant que l'appareil fonctionne avec le premier circuit et que lorsque celui-ci tombe en panne, c'est le deuxième circuit qui prend le relai. Si les durées de vie sont données à nouveau par des lois de Poisson X_1 et X_2 indépendantes, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, donner la loi de la variable aléatoire $Z = X_1 + X_2$ qui représente la durée de vie totale de l'appareil. Donner l'espérance de Z.

Exercice 2. On a pesé 10 palettes de briques de la même fabrication, et on a obtenu les résultats suivants (exprimés en kilogrammes)

$$759, 750, 755, 756, 761, 765, 770, 752, 760, 767.$$

On admet que ces résultats sont issus d'une population infinie distribuée selon une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.

1) Construire un intervalle de confiance à 95% pour μ.

2) Construire un intervalle de confiance à 95% pour σ.

Exercice 3. Soixante douze étudiants inscrits à un cours sont répartis comme suit selon leur mois de naissance :

Janv	Fev	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil	Aout	Sept	Oct	Nov	Déc
6	5	3	5	9	8	7	6	3	6	5	9

A l'aide d'un test du χ^2, testez l'hypothèse d'une distribution uniforme sur les 12 mois, avec un risque de 10%. (Rappel : une distribution uniforme donne un effectif théorique identique pour chaque mois).

Exercice 4. Dans une expérience sur l'acuité visuelle, un chercheur a demandé à 15 individus d'évaluer la distance d'un objet placé à 20 cm. Il a obtenu les résultats suivants en cm :

$$17, 20, 21, 14, 18, 19, 19, 16, 24, 21, 16, 23, 15, 21, 20.$$

En utilisant un test d'hypothèses, peut-on affirmer que les individus ont de la difficulté à évaluer correctement la distance ? (on considèrera un risque de 0,01 et on supposera que l'évaluation de la distance par un individu suit une loi normale).

Exercice 5. On admet que lorsqu'on arrondit un nombre réel à l'entier le plus proche, l'erreur commise est une variable aléatoire X distribuée uniformément sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, c'est à dire que X suit une loi à densité f

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in]-1/2,1/2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On arrondit $n=75$ nombres réels à l'entier le plus proche et on calcule la somme S_a.

1) Soit X_i la variable aléatoire qui donne l'erreur d'arrondie du $i$ème nombre réel. Quelle est la loi de X_i. Donner l'espérance de X_i et sa variance.

2) Exprimer en fonction des X_i la variable aléatoire S qui donne l'écart entre la somme des 75 nombres réels et la somme de leurs arrondis (on ne cherchera pas ici à calculer la loi de S). Calculer l'espérance de S.

3) En énonçant précisemment le théorème utilisé, par quelle loi peut-on approximer S ? Calculer alors (approximativement) la probabilité que S soit supérieure à $2,5$.

Exercice 6. Deux cours ont lieu en parallèle dans deux amphithéâtres contigus. Les deux amphis, appelés A et B, contiennent respectivement 90% et 50% de femmes, et dans B, il y a 4 fois plus d'étudiants. (hommes ou femmes). qu'en A.

Les deux amphithéâtres se vidant simultanément, quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard sorte de A ?

Contrôle continu

(lundi 15 mai 2006)

Durée : 1h30.

Calculatrices non programmables autorisées. Documents interdits.

Question de cours : Enoncer le théorème de la loi faible des grands nombres.

Exercice 1. Soient $\lambda > 0$ et $A \in \mathbb{R}$ deux constantes et soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \end{array}$$

a) Pour $\lambda > 0$ fixé, déterminer A en fonction de λ pour que f soit la densité d'une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Dans la suite, on prendra pour A la valeur trouvée à la question a).

b) Soit X une variable aléatoire réelle, qui suit une loi à densité f. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

c) Montrer que $\{1\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*}]1 - \frac{1}{n}, 1]$. En déduire $\mathbb{P}(X = 1)$ (justifier votre résultat).

Exercice 2. Une entreprise fabrique des piles alcalines pour alarmes et télécommandes de portails électriques. On suppose que dans le processus de fabrication, le voltage obtenu pour chaque pile est indépendant de celui des autres.

a) On suppose dans cette question que le voltage de ces piles est distribué suivant une loi normale de moyenne $12,20$ volts et d'écart type $0,70$ volts. Calculer la proportion des piles ayant un voltage compris entre $12,10$ et $12,30$ volts.

b) Dans cette question, on ne suppose plus que le voltage est distribué suivant une loi normale. On fait seulement l'hypothèse que le voltage est distribué suivant une loi de moyenne $12,20$ et d'écart type $0,70$.

i) On choisit 30 piles au hasard. Quelle est la probabilité que le voltage moyen de ces 30 piles soit supérieur à 12 volts ?

ii) Combien de piles faut-il pour être certain à 95% que leur voltage moyen soit entre $12,10$ et $12,30$ volts ?

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Soit $Z = X + Y$.

Donner la loi de Z lorsque X et Y sont des variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

Université du Sud Toulon-Var

Licence MASS 2ème année, 2005-06.

Correction du contrôle continu

(lundi 15 mai 2006)

Exercice 1. a) Puisque f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, positive, pour que ce soit la fonction densité d'une mesure de probabilité, il faut et il suffit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Le calcul donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = A\Big[-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda}\Big]_0^{+\infty} = \frac{A}{\lambda}.$$

On a donc

$$A = \lambda.$$

b) En utilisant une intégration par partie ($u(x) = x$, $v'(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x + \Big[x(-\mathrm{e}^{-\lambda x})\Big]_0^{+\infty} \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\end{aligned} \tag{1}$$

Un calcul similaire utilisant par exemple deux intégrations par parties successives montre (c.f. T.D.)

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2},$$

ce qui implique

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

c) Puisque pour tout $n > 0$ on a $1 \in]1 - \frac{1}{n}, 1]$, on a l'inclusion

$$\{1\} \subset \cap_{n\in\mathbb{N}^*}]1 - \frac{1}{n}, 1].$$

D'autre part, pour $n = 0$, $]1 - \frac{1}{n}, 1] =]0, 1]$. Donc $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}]1 - \dfrac{1}{n}, 1] \subset]0, 1]$. Soit $a \in]0, 1[$ quelconque. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $a \notin]1 - \frac{1}{n}, 1]$, ce qui implique $a \notin \cap_{n\in\mathbb{N}^*}]1 - \dfrac{1}{n}, 1]$. Cela dḿontre l'autre inclusion

$$\{1\} \supset \cap_{n\in\mathbb{N}^*}]1 - \frac{1}{n}, 1].$$

Les deux inclusions montrent l'égalité.

En utilisant un résultat du cours qui dit que pour toute suite d'ensembles boréliens (A_n), décroissante pour l'inclusion, on a $\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}_X\left(\cap_{n\in\mathbb{N}^*}]1 - \frac{1}{n}, 1]\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(]1 - \frac{1}{n}, 1]\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{e}^{-\lambda(1-\frac{1}{n})} - \mathrm{e}^{-\lambda}) = 0.\end{aligned}$$

Exercice 2. a). Soit X la variable aléatoire qui donne le voltage d'une pile donnée. D'après l'énoncé, $X = \mathcal{N}(12, 2; 0, 4)$. La proportion des piles ayant un voltage compris entre $12, 10$

et $12,30$ volts est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\in[12,1;12,3]) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-12,2}{0,7}\in[-\frac{1}{7},\frac{1}{7}]\right)=\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\in[-\frac{1}{7},\frac{1}{7}]\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\leq\frac{1}{7}\right)-\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\leq-\frac{1}{7},\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\leq\frac{1}{7}\right)-\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\geq\frac{1}{7},\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\leq\frac{1}{7}\right)-(1-\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\leq\frac{1}{7}\right))\end{aligned}$$

D'après la table de la loi normale, on a $\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\leq\frac{1}{7}\right)\simeq 0,5557$, ce qui implique

$$\mathbb{P}(X\in[12,1;12,3])\simeq 0,1114=11,14\%.$$

b-i) Soit X_i la variable aléatoire qui donne le voltage de la $i$ème pile fabriquée. D'après l'énoncé, on a, pour tout i, $\mathbb{E}(X_i)=12,2$ et $\sigma(X_i)=0,7$, et les variables aléatoires X_i sont indépendantes. Ainsi, quitte à supposer que les X_i ont toutes même loi (ce qui ne change rien au problème), on peut utiliser l'approximation donnée par le théorème de la limite centrale, (on est bien dans le cadre de l'approximation puisqu'on a 30 expériences).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{30}(X_1+X_2+...+X_{30})\geq 12\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1+...+X_{30}-30\times 12,2}{\sqrt{30}\times 0,7}\geq\frac{30(12-12,2)}{\sqrt{30}\times 0,7}\right)\\ &\simeq \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1)\geq -1,56)=\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1)\leq 1,56)\simeq 0,9406=94,06\%.\end{aligned}$$

b-ii) On cherche le plus petit entier N tel que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}(X_1+X_2+...+X_N)\in[12,1;12,3]\right)$$

En utilisant à nouveau le théorème de la limite centrale, on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\frac{X_1+...+X_N}{N}\in[12,1;12,3]\right)\\ &=\mathbb{P}\left(\frac{X_1+...+X_N-N\times 12,2}{\sqrt{N}\times 0,7}\in[\frac{N(12,1-12,2)}{\sqrt{N}\times 0,7},\frac{N(12,3-12,2)}{\sqrt{N}\times 0,7}]\right)\\ &\simeq\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\in[-\frac{\sqrt{N}}{7},\frac{\sqrt{N}}{7}]\right)=2\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\leq\frac{\sqrt{N}}{7}\right)-1.\end{aligned}$$

Donc, $\mathbb{P}\left(\frac{X_1+..+X_N}{N}\in[12,1;12,3]\right)\geq 0,95$ est approximativement donné par la condition $2\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\leq\frac{\sqrt{N}}{7}\right)-1\geq 0,95$, i.e., $\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\leq\frac{\sqrt{N}}{7}\right)\geq 0,975$. Le plus petit réel $\tilde{N}$ qui réalise cette condition est donné en utilisant la table de la loi normale centrée réduite, par $\frac{1}{7}\sqrt{\tilde{N}}\simeq 1,96$, soit $\tilde{N}\simeq 188,2384$. Puisque N est entier, on prend $N=189$.

Exercice 3. On a démontré en T.D. que $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

Examen
(lundi 29 mai 2006)

Calculatrices non programmables autorisées. Documents interdits.

Question de cours : Enoncer le théorème de la limite centrale.

Exercice 1. Une compagnie aérienne donne des réservations sur le vol d'un appareil de 400 places. La probabilité qu'un passager ayant réservé pour ce vol ne se présente pas à l'embarquement est de $0,08 = 8\%$.

a) Soit X la variable aléatoire qui décrit le choix d'un passager, et qui vaut 1 si le passager en question se présente à l'embarquement et 0 si le passager se désiste. Quelle loi de probabilité est-il raisonnable d'associer à la variable aléatoire X ? Donner le paramètre p_0 de cette loi. Calculer alors $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

b) Si la compagnie accorde 420 réservation sur ce vol, quel est le risque de "surbooking", i.e., quelle est la probabilité que se présentent plus de passagers que les 400 qui pourront embarquer ? (On commencera par modéliser ce problème à l'aide d'une famille de variables aléatoires X_i, $i = 1, ..., 420$, indépendantes et de même loi, et dont on choisira la loi en s'aidant de la question a)).

c) Quel est le nombre maximum de billet que doit vendre la compagnie pour être sûre à 99% que tous les passagers qui se présenteront à l'embarquement avec un billet aient une place dans l'avion ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire, de loi de probabilité à densité $f_X(x)$.

a) Rappeler la définition de la fonction de répartition de X.

b) En calculant la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = -X$, montrer que Y est une variable aléatoire à densité f_Y que l'on exprimera en fonction de f_X.

c) Deux amis ont rendez-vous à midi ; Des causes de retard indépendantes font que chacun arrive entre 12h et 13h. On notera par X_1 et X_2 les deux variables aléatoires qui donnent le temps de retard de chacun des deux amis. On supposera que X_1 et X_2 sont indépendantes, et suivent une loi à densité uniforme sur $[0, 1]$, indépendantes.

c-i) Donner la loi de $-X_2$, puis la loi de $X_1 - X_2$.

c-ii) (question supplémentaire) En déduire la probabilité que les deux amis se rencontrent si chacun attend au plus 1/4 d'heure.

Exercice 3. On dispose de K urnes contenant chacune N boules numérotées de 1 à N. On choisit au hasard une boule dans chaque urne, de façon indépendante.

a) Pour $i \in \{1, 2, ..., K\}$, on considère X_i la variable aléatoire discrète égale au numéro de la boule tirée dans la $i$ème urne. Quelle loi est-il raisonnable de considérer pour X_i ?

b) Soit

$$Z : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \{1, 2, ..., N\} \\ \omega & \mapsto & \max_{i \in \{1,...,K\}} X_i(\omega) \end{array}$$

qui donne la plus grande des valeurs tirées dans les K urnes. On suppose les variables aléatoires X_i indépendantes, et de loi celle trouvée à la question a). Calculer la fonction de répartition de Z. En déduire, pour $M \in \{1, 2, ..., N\}$, $\mathbb{P}(Z = M)$. Vérifier que l'on a $\sum_{M=1}^{N} \mathbb{P}(Z = M) = 1$.

Examen 2ème session
(septembre 2006)

Calculatrices non programmables autorisées. Documents interdits.
Documents joints : table de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$; table des lois de Poisson.
Durée de l'examen : 2h.

Question de cours : Enoncer le théorème de la loi faible des grands nombres.

Exercice 1. Le contenu en nicotine d'une cigarette d'une marque bien connue est une variable aléatoire de moyenne 0,8 mg et d'écart type 0,1 mg.
i) Rappeler le théorème de la limite centrale.
ii) Un fumeur de cette marque consomme 5 paquets (de 20 cigarettes) par semaine
- A l'aide du théorème de la limite centrale, donner une approximation de la probabilité qu'il absorbe en une semaine plus de 82 mg de nicotine.
- Donner une approximation de la probabilité qu'il absorbe en une semaine moins de 79 mg.

iii) Déterminer le nombre minimum de cigarettes que doit fumer une personne pour être sûre à 95% d'absorber plus de 80 mg de nicotine.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que ces deux variables aléatoires sont à densité, de densité respectives f_X et f_Y.
i) Donner l'expression de la densité de la variable aléatoire $X + Y$.
ii) On suppose de plus dans cette question que X et Y suivent une loi exponentielle de paramètre 1, c'est à dire $f_X(x) = f_Y(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$, où $\mathbf{1}(x)$ est la fonction qui vaut 0 si $x < 0$ et qui vaut 1 si $x \geq 0$. Donner la loi de $X + Y$. Vérifier par le calcul que $\mathbb{P}(X + Y \in \mathbb{R}) = 1$.

Exercice 3. Le responsable d'un comité d'entreprise a effectué une compilation du nombre d'accidents de travail qui se sont produits depuis deux ans dans l'usine. Ceci a permit d'établir que le taux moyen d'accidents de travail a été de $1,6$ accidents par jour.
i) On admet que le nombre X d'accidents de travail en une journée est une variable aléatoire discrète qui obéit à une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.
Dans la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 1,6$.
ii) Quel est l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X ?
iii) Quelle est la probabilité d'observer plus de deux accidents par jour ?
iv) Calculer la probabilité d'avoir un nombre d'accidents compris dans l'intervalle $[E(X) - \sigma(X),\, E(X) + \sigma(X)]$.

Exercice 4. La note obtenue par des étudiants à un examen est une variable aléatoire réelle X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m = 7, \sigma = 3)$.

(1) Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10, et la note en dessous de laquelle se trouvent 10 % des étudiants.
(2) Compte tenu de ces résultats, on décide de revaloriser l'ensemble des notes par une transformation linéaire $Z = aX + b$. Quelles valeurs doit-on donner à a et b pour que les valeurs précédentes passent respectivement à 50 % et 7 pour la variable aléatoire Z ?

Examen
(lundi 11 juin 2007)

Exercice 1. Tous les jours de l'année, des gendarmes placent un radar au bord d'une autoroute afin de détecter les excès de vitesse commis à cet endroit. On suppose que le nombre d'excès de vitesse commis durant une journée est une variable aléatoire de Poisson X de paramètre $\lambda = 2,7$.

On rappelle que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

i) Donner une approximation de la probabilité pour que le nombre d'excès de vitesse enregistrés durant une année (365 jours) soit strictement plus grand que 1000.

ii) Combien de jours faut-il pour être sûr à 90% au moins d'enregistrer 1000 excès de vitesse ?

Exercice 2. Un laboratoire d'agronomie a effectué une étude sur le maintien du pouvoir germinatif des graines de *Papivorus subaquaticus* après une conservation de 3 ans. Sur un lot de 80 graines, 47 ont germé. Donner, avec une confiance de 95%, un intervalle de confiance pour la probabilité de germination des graines de Papivorus subaquaticus après une conservation de 3 ans.

Exercice 3. Une enquête sur les chiffres d'affaires mensuel de 103 magasins de détails a donné les résultats suivants (en milliers d'euros).

Chiffres d'affaires	Effectifs
$5,5$ à $7,5$	5
$7,5$ à $8,5$	12
$8,5$ à $9,5$	27
$9,5$ à $10,5$	23
$10,5$ à $11,5$	15
$11,5$ à $12,5$	12
$12,5$ à $15,5$	9

i) Soit $X = \mathcal{N}(10,06; 1,82)$ la variable aléatoire normale de moyenne $10,06$ et d'écart type $1,82$.

Calculer $\mathbb{P}(X \leq 5,5)$ et $\mathbb{P}(X \in]5,5;\, 7,5])$.

ii) En effectuant des calculs similaires à la question i) on obtient les résultats suivants :

$$
\begin{gathered}
\mathbb{P}(X \in]7,5; 8,5]) \simeq 0,1156 \\
\mathbb{P}(X \in]8,5; 9,5]) \simeq 0,1834 \\
\mathbb{P}(X \in]9,5; 10,5]) \simeq 0,2165 \\
\mathbb{P}(X \in]10,5; 11,5]) \simeq 0,1904 \\
\mathbb{P}(X \in]11,5; 12,5]) \simeq 0,1247 \\
\mathbb{P}(X \in]12,5; 15,5]) \simeq 0,0887 \\
\mathbb{P}(X \geq 15,5) \simeq 0,0014
\end{gathered}
$$

A l'aide de ces résultats et de la question i), tester au risque $\alpha = 0,05$ la validité de l'ajustement de la distribution des chiffres d'affaires à la loi normale X.

Examen 2ème session

(vendredi 31 août 2007)

Durée de l'épreuve : 2h00

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est une bijection continue strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}$ sur $]0,\, 1[$.
i) Soit la variable aléatoire réelle $Y := F_X(X)$. Calculer $\mathbb{P}(Y \leq y)$. En déduire que Y suit une loi uniforme sur $]0, 1[$.
ii) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 2. *Théorème de la limite centrale.* Un fabricant d'ordinateurs affirme que les cartes mères fabriquées par son entreprise ont une durée de vie de 48 mois, avec un écart type de 6 mois. Une association de consommateurs teste la durée de vie de 50 cartes. En supposant que les informations données par le fabricant sont exactes, quelle est approximativement la probabilité que l'association trouve sur son échantillon une durée de vie moyenne inférieure à 45 mois ?

Exercice 3. Un hôpital reçoit une grosse quantité de fioles de sérum. Ces fioles doivent contenir 50mg de sérum. On choisit un échantillon aléatoire de 64 fioles et la moyenne obtenue sur cet échantillon est $\overline{x} = 49,25$mg. On sait que l'écart type de la population est $\sigma = 2$mg. Au seuil de signification $0,01$, l'hôpital devrait-il accepter la livraison ?

Exercice 4. (exercice 3 session juin 2007)