Université du Sud Toulon-Var
Département de Mathématiques

L3 MASS 2007/08
EXAMEN de M55 - Probabilités
Jeudi 17 janvier 2008

Durée de l'épreuve: 3h00

Calculatrice autorisée.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Une école de commerce souhaite recruter cette année au moins 1050 nouveaux étudiants. Cependant, cette école ne peut pas accueillir plus de 1060 étudiants. On sait qu'il y a 60% de chances qu'un étudiant dont le dossier a été retenu accepte de venir dans cette école.

i) Si l'école retient 1700 dossiers de candidatures, quelle est la probabilité qu'il y ait trop d'étudiants ayant accepté?

ii) Quitte à louer d'autres locaux pour absorber un éventuel trop plein d'étudiants, combien de dossiers cette école doit retenir pour être sûre à 95% d'atteindre ses objectifs de recrutement?

Exercice 2. Une compagnie compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure. Quel est approximativement le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à $0,025$.

Exercice 3. On suppose que le nombre d'arrivées au service d'urgence d'un C.H.U. aux heures de moyenne activité est modélisé par un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 8$ personnes/heure.

i) Quelle est la probabilité que moins de 3 personnes arrivent en 20 minutes.

ii) Un patient vient d'arriver aux urgences. Calculer la probabilité que le suivant arrive dans les 10 minutes qui suivent.

iii) Quelle est la probabilité d'avoir eu au moins 3 patients dans le premier quart d'heure, sachant qu'il y en a eu 6 dans la première demi-heure?

Exercice 4. Dans une population de rats de laboratoire, la détection d'une infection nécessite la mise en place de 3 examens consécutifs (numérotés 1, 2, et 3). Si l'un des examens est négatif, le sujet est déclaré sain; si les trois examens sont positifs, le sujet est infecté.

Pour chaque sujet, on commence par effectuer l'examen 1. Il y a alors trois possibilités:

- Avec probabilité r, l'examen est positif, et on procède alors à l'examen suivant;
- avec probabilité p, l'examen est négatif, et on arrête la série d'examens car le sujet est alors déclaré sain;
- avec probabilité $q = 1 - r - p$, l'examen n'a pas fonctionné correctement et il faut le recommencer.

On procède de même pour les examens 2 et 3, pour lesquels on a les mêmes probas p, q, et r. Dans le cas de l'examen 3, s'il est positif (probabilité r), le sujet est déclaré infecté.

i) Construire une chaîne de Markov à cinq états qui modélise ce processus. Montrer qu'il s'agit d'une chaîne de Markov absorbante. Donner la matrice de transition associée. Calculer la matrice fondamentale.

Pour la suite, on suppose $r = 0,6$ et $p = 0,1$.

ii) Trouver le nombre moyen d'examens nécessaires avant d'obtenir un diagnostic sur le sujet.

iii) Quelle est la probabilité qu'un sujet soit infecté?

Exercice 5. Un ordinateur de bureau est dans l'un des 3 états suivants: En fonction (F), en réparation (R), ou irréparable et bon pour le recyclage (I). Si l'ordinateur fonctionne, la probabilité qu'il fonctionne le jour suivant est de $99,5\%$, et la probabilité qu'il nécessite une réparation est de $0,5\%$. S'il est en réparation, il y a 5% de chance qu'il nécessite encore d'être réparé le jour suivant, et 5% de chance qu'il soit définitivement irréparable.

i) Sachant qu'un ordinateur est en parfait état de marche le 1er jour, quelle est la probabilité qu'il soit en réparation le 3ème jour?

ii) Quel est le nombre moyen de jours qu'un ordinateur passe en état de marche avant d'être recyclé? Quel est le nombre moyen de jours que l'ordinateur passe en réparation avant d'être recyclé?

Exercice 6. Un automobiliste choisit d'écouter une des deux stations de radio nationales d'informations (notées A, B) à sa disposition, pendant son trajet au travail. L'auditeur est satisfait de l'émission écoutée et reste sur la même station le jour suivant avec des probabilités respectives pour A et B de $0,8$ et $0,6$. S'il n'est pas satisfait de la radio qu'il a écoutée, il choisit le lendemain l'autre station de radio.

i) Sachant qu'il écoute la radio A le mercredi, quelle est la probabilité qu'il écoute cette même station le samedi?

ii) Sachant qu'il écoute la radio A au jour 1, quelle est la probabilité qu'il écoute la radio B au jour $n + 1$ (on compte ici uniquement les jours de travail)?