Université du Sud Toulon-Var
Département de Mathématiques

L3 MASS 2006/07
Contôle continu de M55 - Probabilités
Lundi 3 décembre 2007

Durée de l'épreuve: 2h00

Documents autorisés; calculatrice autorisée.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Un fournisseur d'accès à internet met en place un point local d'accès qui dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.
i) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un moment donné. Quelle loi est-il raisonnable de prendre pour X? (Expliquez votre réponse). Quelle est l'espérance de X? Quelles est la variance de X?
ii) On pose $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$. Justifier précisemment que l'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
iii) Combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé soit inférieure à $2,5\%$.

Exercice 2. Soient X et U deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, et U suit une loi binomiale de paramètre 1/2: $\mathbb{P}\{U=-1\} = \mathbb{P}\{U=1\} = 1/2$. On définit la variable aléatoire $Y = UX$. Montrer que $Y = \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes (On rappellera la définition d'indépendance de deux variables aléatoires X et Y, ainsi que la caractérisation de cette propriété à l'aide des espérances).

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.
i) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$.
ii) Calculer la loi de $X+Y$ (on pourra appliquer, sans le redémontrer, un résultat vu en cours). Vérifier que $\mathbb{P}(X+Y \in \mathbb{R}) = 1$.