

L3 MASS 2008/09
Examen M55 - Probabilités
(mercredi 5 janvier 2009)

Durée de l'épreuve: 3h00

Calculatrice autorisée.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et des explications.

Exercice 1. A l'occasion d'un concert de musique organisé dans une salle de spectacle, on décide de fabriquer en direct un CD des chansons des artistes qui participent à la manifestation. Le CD sera vendu à l'issue du concert (et uniquement à ce moment là).

On estime que 30% des personnes présentes à la manifestation achèteront le CD ainsi produit.

Le nombre de personnes qui seront présentes à la manifestation est de 4000.

- i) Quelle est la probabilité que les organisateurs vendent au moins 1100 CD.
- ii) Quel est le nombre maximum de CD que les organisateurs peuvent fabriquer pour être sûrs à 95% d'écouler la totalité du stock?

Réponse:

i) On utilise l'approximation donnée par le théorème de la limite Centrale. On trouve que la probabilité de vendre au moins 1100 CD est approximativement de 99,97%.

ii) On utilise à nouveau le T.L.C. On trouve alors que le nombre maximum de CD à fabriquer est $N = 1152$.

Exercice 2. Le nombre moyen de dossiers d'inscription à l'université traité intégralement par heure (par une personne) est de 3.

On modélise le problème à l'aide d'un processus de Poisson de paramètre λ .

- i) Quelle est la probabilité qu'aucun dossier de soit traité en une heure.
- ii) Un dossier vient juste d'être correctement enregistré. Calculer la probabilité que le dossier suivant soit traité dans les 40 minutes.
- iii) Quelle est la probabilité d'avoir eu au moins 1 dossier traité dans le premier quart d'heure, sachant qu'il y en a eu en tout exactement 4 de traités dans l'heure.

Réponse:

i) $\mathbb{P}(N_{]0,1]} = 0) = e^{-3} \times \frac{3^0}{0!} \approx 4,98\%$.

ii) $\mathbb{P}(Z_1 \leq 40/60) = \int_0^{\frac{2}{3}} \lambda e^{-\lambda t} dt \approx 86,47\%$ (avec $\lambda = 3$).

iii) $\mathbb{P}(N_{]0,\frac{1}{4}[} \geq 1 \mid N_{]0,1]} = 4) = 1 - \mathbb{P}(N_{]0,\frac{1}{4}[} = 0 \mid N_{]0,1]} = 4) \approx 68,36\%$.

Exercice 3. Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des 3 états suivants: Immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S).

D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes:

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0.9 ou passer à l'état (S) avec une probabilité 0.1.

- étant dans l'état (S), il peut le rester avec une probabilité de 0.5 ou tomber malade avec une probabilité 0.5.

- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0.2 ou passer à l'état immunisé avec une probabilité 0.8.

i) Modéliser ce problème à l'aide d'une chaîne de Markov. Tracer le schéma des probabilités de transition et écrire la matrice de transition P .

ii) Outre les propriétés de chaîne de Markov, quelles sont les propriétés de cette chaîne de Markov (ergodique, régulière, absorbante, etc.).

iii) Calculer la probabilité d'être dans chacun des états au bout de trois mois, puis six mois, pour un individu qui au départ est immunisé. (on effectuera ici chaque étape de calcul à 10^{-3} près).

iv) Calculer la distribution stationnaire. Au cours d'une vie, quel est le pourcentage moyen de temps qu'une personne a passé en ayant cette maladie?

Réponse:

i) Soient (dans l'ordre) les états possibles: $\{I, S, M\}$. On a alors la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

ii) La matrice de transition P est ergodique et régulière (non absorbante).

iii) On trouve (approximation à 10^{-3} près.

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,769 & 0,151 & 0,08 \\ 0,64 & 0,165 & 0,195 \\ 0,824 & 0,128 & 0,048 \end{pmatrix}$$

Donc, étant au départ immunisé, les probas respectives d'être dans les états I , S et M au bout de 3 mois sont 76,9%, 15,1% et 8%.

On a aussi

$$P^6 = (P^3)^2 = \begin{pmatrix} 0,754 & 0,151 & 0,095 \\ 0,758 & 0,149 & 0,093 \\ 0,755 & 0,152 & 0,093 \end{pmatrix}$$

Donc, étant au départ immunisé, les probas respectives d'être dans les états I , S et M au bout de 6 mois sont 75,4%, 15,1% et 9,5%.

iv) La distribution stationnaire est $w = \frac{1}{53}(40, 8, 5) \approx (0,755; 0,151; 0,094)$. Le pourcentage moyen de temps qu'une personne a passé en ayant cette maladie est $1/w_3 = 53/5 \approx 10,6\%$.

Exercice 4. Pour représenter le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème, nous modélisons le problème à l'aide d'une chaîne de Markov avec quatre états possibles:

- La molécule est dans le sol,
- La molécule est dans l'herbe,
- La molécule a été absorbée par du bétail
- La molécule est sortie de l'écosystème.

La matrice de transition est la suivante

$$P = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/10 & 0 & a \\ 1/10 & 2/5 & 1/2 & b \\ 3/4 & 0 & 1/5 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- i) Déterminer a , b et c pour que P soit bien une matrice de transition.
 ii) Montrer qu'il s'agit alors d'une chaîne de Markov absorbante. Calculer la matrice fondamentale N .
 iii) Quel est le "temps" (nombre d'étapes) moyen que la molécule passe dans le sol?
 iv) Quel est le "temps" moyen avant que la molécule disparaisse de l'écosystème.

Réponse:

i) $a = 1/10$, $b = 0$, $c = 1/20$.

ii) La matrice fondamentale est

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 320/37 & 160/37 & 100/37 \\ 910/111 & 640/111 & 400/111 \\ 300/187 & 150/187 & 140/187 \end{pmatrix}$$

iii) Le temps moyen que la molécule passe dans le sol est $n_{11} = 320/37 \approx 8,65$.

iv) Le temps moyen avant que la molécule disparaisse est $n_{11} + n_{12} + n_{13} = 580/37 \approx 15,68$.

Exercice 5. On étudie un caractère donné d'un animal lors de croisements successifs. Le caractère observé sur l'animal est donné par deux gènes, l'un dominant (G) et l'autre récessif (g). Quand l'animal a les deux gènes (GG), (Gg) ou (gG), le caractère observé est le même; on l'appellera *caractère 1*. Par contre, lorsque les deux gènes sont *gg*, on observe sur l'animal le *caractère 2*.

Les trois paires de gènes possibles sont donc (GG): purement dominant; (Gg): hybride (équivalent à (gG)); et (gg): purement récessif.

Chaque animal hérite d'un gène (et un seul) de chacun de ses parents; Les gènes des parents, quels qu'ils soient, sont transmis de façon équiprobable (par exemple, si un parent a la paire de gène (Gg), il y a 50% de chance qu'il transmette G et 50% de chance qu'il transmette g).

- i) En supposant que chaque nouveau-né est **systématiquement croisé avec un animal hybride**, construire une chaîne de Markov qui décrit le caractère des individus d'une même descendance (on décrira en fait les paires de gènes, car elles permettent de déduire le caractère). Donner la matrice de transition P associée.
 ii) On considère que le premier individu correspond à la génération 0. Donner la probabilité que l'individu né à la génération $n = 2$ soit purement récessif, sachant que le premier individu était purement dominant. Donner la probabilité qu'à la génération $n = 2$ l'individu soit de *caractère 1* sachant que le premier individu était de *caractère 2*.

Réponse:

i) En choisissant, dans l'ordre suivant, les 3 états suivants possibles :

$$\{(GG), (Gg) \text{ ou } (gG), gg\},$$

on obtient comme matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ii) En calculant P^2 , on trouve que les probabilités cherchées sont respectivement $1/8 = 12,5\%$ et $1/2 + 1/8 = 5/8 = 62,5\%$.