Hamiltonien de Landau

Le Hamiltonien décrivant le mouvement d'un électron se qui se déplace dans un plan et qui est soumis à un champ magnétique constant B orthogonal à ce plan s'écrit dans un système d'unité convenablement choisi:

$$H = K_x^2 + K_y^2 \text{ sur } L^2(\mathbb{R}^2),\ K_x = i\frac{\partial}{\partial x} - By,\ K_y = i\frac{\partial}{\partial y} + Bx.$$

1) Calculer le commutateur

$$[K_x, K_y] = K_x K_y - K_y K_x.$$

2) Soient

$$K_\pm = K_x \mp i K_y.$$

Calculer $[K_+, K_-]$ et montrer que $H = K_+K_- + 2B$. En déduire que si $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ satisfait $H\Psi = \lambda\Psi$, alors $HK_+\Psi = (\lambda + 4B)K_+\Psi$.

3) Chercher la forme générale des solutions de $K_-\Psi = 0$. On pourra introduire $z = x + iy$ et on montrera que les solutions sont de la forme

$$\Psi(x, y) = \mathrm{e}^{-\frac{B}{2}(x^2+y^2)} f(\bar{z}), \tag{1}$$

où f est une fonction arbitraire.

4) Soient $D_x = i\frac{\partial}{\partial x} + By$ et $D_y = i\frac{\partial}{\partial y} - Bx$. Montrer que $[D_x, K_x] = [D_x, K_y] = [D_y, K_x] = [D_y, K_y] = 0$. Calculer $[D_x, D_y]$ et $[D_+, D_-]$, où $D_\pm = D_x \pm iD_y$.

5) Montrer que Ψ défini par (1), avec $f = 1$ est solution de $D_-\Psi = 0$.

6) Pour $\Psi_0(x, y) = \mathrm{e}^{-\frac{B}{2}(x^2+y^2)}$, montrer que $\Psi_n = K_+^n\Psi_0$ satisfait $H\Psi_n = E_n\Psi_n$, avec $E_n = 4B(n + \frac{1}{2})$.

7) Soit $\Psi_{n,m} = K_+^n D_+^m \Psi_0$. Montrer les propriétés:

$$\begin{cases} H\Psi_{n,m} = E_n\Psi_{n,m} \\ \langle \Psi_{n,m},\ \Psi_{n',m'}\rangle = 0 \quad \text{si } n \neq n' \text{ ou } m \neq m'. \end{cases}$$

8) En admettant que la famille $\{\Psi_{n,m},\ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ est une base de $L^2(\mathbb{R}^2)$, montrer que

$$\sigma(H) = \{\ 4(n + \frac{1}{2})B,\ n \in \mathbb{N}\ \}\ ,$$

et que chaque valeur propre est de multiplicité infinie.