L'oscillateur harmonique à une dimension

Le hamiltonien d'une particule de masse m soumis à une force de rappel proportionnelle à x est

$$\frac{-\Delta}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \text{ sur } L^2(\mathbb{R}).$$

1) Montrer à l'aide d'un changement de variable, que l'on peut se ramener à l'étude de l'opérateur

$$-\Delta + x^2.$$

2) Soit

$$a_\pm = x \mp \frac{d}{dx}.$$

Montrer que l'on a

$$H = a_+ a_- + 1.$$

3) Montrer que pour tout $\psi \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle \Psi, a_+ a_- \psi \rangle \geq 0.$$

4) Trouver une solution de $a_- \Psi_0 = 0$, telle que $\|\Psi_0\| = 1$. En déduire que $H\Psi_0 = \Psi_0$.

5) Calculer le commutateur

$$[a_+, a_-] = a_+ a_- - a_- a_+.$$

En utilisant la relation $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, montrer alors que pour tout entier positif n, le vecteur $\Psi_n = a_+^n \Psi_0$ satisfait

$$H\Psi_n = E_n \Psi_n, \; E_n = n + 1. \tag{1}$$

6) Montrer que $\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = c_{n,m} \delta_{nm}$ et déterminer $c_{n,m}$.

7) Montrer que si Ψ satisfait $H\Psi = E\Psi$ alors $\zeta = a_- \Psi$ est défini et satisfait

$$H\zeta = (E - 2)\zeta.$$

En déduire à l'aide de 3) que E est nécessairement un entier impair.

8) Montrer que si u et v satisfont $Hu = Eu$ et $Hv = Ev$, alors le Wronskien de u et v,

$$W(u, v)(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x),$$

est nul

9) En déduire qu'il n'existe pas d'autre solution de $H\Psi = E\Psi$ que celles de (1).

10) En utilisant que le spectre de H est purement discret (voir Théorème XIII.16 dans [Reed-Simon Vol. 4] sur le spectre des opérateurs $-\Delta + V$, avec $V(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$.), en déduire que

$$\sigma(H) = \{2n + 1, n \in \mathbb{N}\}.$$