

Spectre des Hamiltoniens avec potentiel confinant
c.f. e.g. Reed-Simon Vol. IV, Théorèmes XIII.16 et XIII.67

Le Hamiltonien décrivant l'énergie d'un électron soumis à un potentiel électrostatique V est donné, dans un système d'unités bien choisi, par:

$$H = -\Delta + V(x) \quad \text{sur } L^2(\mathbb{R}^3),$$

où V est un potentiel multiplicatif sur \mathbb{R}^3 , à valeurs dans \mathbb{R} , tel que $-\Delta + V$ soit auto-adjoint.

On suppose:

$$V(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty .$$

On va alors montrer (entre autres):

$$\sigma(-\Delta + V) = \sigma_d(-\Delta + V) .$$

1) Montrer que pour tout $c > 0$, il existe une boule S_c de \mathbb{R}^3 telle que

$$\forall x \notin S_c, \quad V(x) \geq c$$

2) Soit W_c le potentiel défini par

$$W_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin S_c \\ -c & \text{si } x \in S_c \end{cases} .$$

Montrer

$$(1) \quad V \geq c + W_c .$$

Pour $E > 0$, on rappelle que le noyau de l'opérateur $(-\Delta + E)^{-1}$ est donné par (le montrer si nécessaire)

$$K_E(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sqrt{E}|x-y|}}{|x-y|} ,$$

i.e.,

$$(-\Delta + E)^{-1}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} K_E(x, y)\psi(y)dy$$

Montrer que le noyau de $W_c(-\Delta + E)^{-1}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^6)$, et en déduire que W_c est relativement $-\Delta$ -compact. Qu'est-ce que cela implique pour le spectre essentiel de $-\Delta + W_c$?

3) En déduire que l'opérateur $-\Delta + W_c$ n'admet qu'un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs propres dans $] -\infty, -1]$.

4) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$,

$$\mu_n(-\Delta + W_c) \geq -1 ,$$

où $\mu_n(-\Delta + W_c)$ est donné par le principe du min-max pour $-\Delta + W$:

$$\mu_n(-\Delta + W_c) = \sup_{\phi_1, \dots, \phi_{n-1}} \inf_{\{\psi \in \mathcal{D}(H), \|\psi\|=1, \psi \in \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})^\perp\}} \langle \psi, (-\Delta + W_c)\psi \rangle .$$

5) En utilisant le principe du min-max et (1), montrer que $\mu_n(H) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, où $\mu_n(H)$ est défini par le principe du min-max pour H .

6) Conclure sur la nature du spectre de H (purement discret et non borné supérieurement).